文章编号：1673-5196(2020)04-0154-03

D_4-δ-盖及其应用

王永铎，王亚婷
（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州　730050）

摘要：引入了D_4-δ-盖的概念，即称(F,g)为模M的D_4-δ-盖，若F是D_4-模，g是F到M的满同态，且$\mathrm{Ker}(g)\ll_\delta F$. 研究了$D_4$-$\delta$-盖的性质以及它与投射$\delta$-盖之间的联系，并用$D_4$-$\delta$-盖刻画了$\delta$-完备环(半完备环，半正则环).

关键词：D_4-δ-盖；δ-完备环；δ-半完备环；δ-半正则环
中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A

D_4-δ-covers and their applications

WANG Yong-duo，WANG Ya-ting
(School of Science，Lanzhou Univ. of Tech.，Lanzhou　730050，China)

Abstract：The concept of D_4-δ-covers is introduced. A pair (F,g) is called a D_4-δ-cover of a module M if F is a D_4-δ-module，g an epimorphism of F onto M，and $\mathrm{Ker}(g)\ll_\delta F$. The properties of D_4-δ-cover and their relations to projective δ-cover are studied and δ-perfect rings (semiperfect rings，semiregular rings) are characterized by using D_4-δ-covers.

Key words：D_4-δ-cover；δ-perfect ring；δ-semiperfect ring；δ-semiregular ring

在本文中，R都是有单位元的结合环，所有的模都是右R-模. M^n表示有限个M做直和. $\mathrm{Hom}(M,N)$表示M到N的同态集. R_n表示R上的n阶矩阵环. $N\leqslant M$表示N是M的子模，$N\leqslant^\oplus M$表示N是M的直和项. 作为投射模的推广，Ding等[1]引入了D_4-模的概念. 即称模M是D_4-模，若$M=A\oplus B$，$A,B\leqslant M$，且f是A到B的模同态，$\mathrm{Im}(f)\leqslant^\oplus M$，则$\mathrm{Ker}(f)\leqslant^\oplus M$. 在$D_4$-模概念的基础上又引入了$D_4$-盖的概念. 即称$(F,g)$为模$M$的$D_4$-盖，若$F$是$D_4$-模，$g$是$F$到$M$的满同态，且$\mathrm{Ker}(g)\ll F$. 并用$D_4$-盖刻画了完备环，半完备环和半正则环. Zhou[2]引入δ-小子模和投射δ-盖的概念. 即称M的子模K在M中是δ-小的(记作$K\ll_\delta M$)，若对于使M/L奇异的M的任意真子模L，都有$M\neq K+L$. 称(P,p)为模M的投射δ-盖，若P是投射模，p是P到M的满同态，且$\mathrm{Ker}(p)\ll_\delta F$. 并用投射$\delta$-盖刻画了$\delta$-完备环(半完备环，半正则环). 受到文献[1-2]的启发，本文引入了D_4-δ-盖的概念. 称(F,g)为模M的D_4-δ-盖，若F是D_4-模，g是F到M的满同态，且$\mathrm{Ker}(g)\ll_\delta F$. 证明了若投射模$F$到模$M$存在满同态，则$M$有投射$\delta$-盖当且仅当$F\oplus M$有$D_4$-$\delta$-盖，并用$D_4$-$\delta$-盖刻画了$\delta$-完备环(半完备环，半正则环). 未注明概念见文献[3-6].

设R是环，M是右R-模.

定义1[2]　称M的子模N在M中是δ-小的，如果对使得M/K奇异的M的任意真子模K都有$K+N\neq M$.

定义2[2]　称R是δ-完备环(半完备环，半正则环)，若任意R-模(单R-模，循环表示R-模)有投射δ-盖.

定义3　称M为D_4-模，若M满足以下等价条件之一：

1) 若$M=A\oplus B$，其中$A,B\leqslant M$，f是A到B的满同态，则$\mathrm{Ker}(f)\leqslant^\oplus A$；

2) 若$M=A\oplus B$，其中$A,B\leqslant M$，f是A到B的同态，且$\mathrm{Im}(f)\leqslant^\oplus B$，则$\mathrm{Ker}(f)\leqslant^\oplus A$.

定义4[7]　称M是δ-完备的，若M的任意同态像有投射δ-盖.

定义5[7]　称M是δ-补模，若对M的任意子模N，都存在$X\leqslant M$使得$M=N+X$且$N\cap X\ll_\delta X$. 此时，也称X是N的δ-补.

定义6[7]　称M是δ-提升模，若对M的任意子

收稿日期：2018-07-12
基金项目：国家自然科学基金(11861043)
作者简介：王永铎(1974-)，男，甘肃靖远人，博士，教授.

模 N，都存在分解 $M=A\oplus B$ 使 $A\leqslant N$ 且 $N\cap B\ll_{\delta}M$.

定义 7[7]　称 M 是 δ-$\oplus$-补模，若 M 的任意子模 K 都有 δ-补 X，使得 $X\leqslant^{\oplus}M$.

定义 8[8]　称 M 是拟投射模，若 $\lambda: M\to N$ 是满同态，则 $\mathrm{Hom}(M,\lambda):\mathrm{Hom}(M,M)\to\mathrm{Hom}(M,N)$ 也是满同态.

定义 9[8]　称 (F,g) 为 M 的拟投射 δ-盖，若 F 是拟投射模，g 是 F 到 M 的满同态，且 $\mathrm{Ker}(g)\ll_{\delta}F$. 此时，也称 F 为模 M 的拟投射 δ-盖.

定义 10　称 (F,g) 为 M 的 D_4-δ-盖，若 F 是 D_4-模，g 是 F 到 M 的满同态，且 $\mathrm{Ker}(g)\ll_{\delta}F$. 也称 F 为模 M 的 D_4-δ-盖.

引理 1[2]　设 $N\leqslant M$，则 $N\ll_{\delta}M\Leftrightarrow$ 若 $N+X=M$，则存在 N 的投射半单子模 Y，使得 $M=X\oplus Y$.

定理 1　设 g 是模 F 到模 M 的满同态，且 F 是投射模. 则 M 有投射 δ-盖当且仅当 $F\oplus M$ 有 D_4-δ-盖.

证明　"$\Rightarrow$"设 (P,f) 是 M 的投射 δ-盖，id_F 是 F 到 F 的恒等同态，则 $(F\oplus P, id_F\oplus f)$ 是 $F\oplus M$ 的 D_4-δ-盖.

"$\Leftarrow$"设 $f: P\to F\oplus M$ 是 $F\oplus M$ 的 D_4-δ-盖，π_F 是 $F\oplus M$ 到 F 的自然投影，则 $\pi_F f$ 是 P 到 F 的满同态. 又因为 F 是投射模，所以存在 F 到 P 的同态 λ 使得图 1 可换：

$$\begin{tikzcd}
 & & & F \arrow[lll, "\lambda"'] \arrow[d, "id_F"] & \\
P \arrow[rr, "f"] & & F\oplus M \arrow[r, "\pi_F"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1　交换图

Fig. 1　Commutation diagram

令 $K=\mathrm{Ker}(\pi_F f)$，下证 K 是 $F\oplus M$ 的投射 δ-盖. 由图 1 知 $P=\mathrm{Im}(\lambda)+K$，$\pi_F f\lambda=id_F$，从而 $\pi_F f$ 可裂，故 $P=\mathrm{Im}(\lambda)\oplus K$. 记 π_M 为 $F\oplus M$ 到 M 的自然投影，令 $\theta=\pi_M f|_k$，其中 $f|_k$ 为 f 在 K 上的限制同态. 设任意 $m\in M$，由 f 是满同态知存在 $p\in P$ 使得 $f(p)=(0,m)$. 因为 $P=\mathrm{Im}(\lambda)\oplus K$，可记 $p=(\lambda(r),k)$，其中 $r\in F$，$k\in K$，所以 $(0,m)=f(p)=(f\lambda(r),f(k))$. 因为 $\pi_F(0,m)=0$，所以 $(\pi_F f\lambda(r),\pi_F f(p))=(r,0)=0$，因此 $p=(0,k)$. 即 θ 为 K 到 M 的满同态. 任取 $N\leqslant K$ 使得 K/N 奇异，且 $K=N+\mathrm{Ker}(\theta)$. 因为 $P=\mathrm{Im}(\lambda)\oplus K=(\mathrm{Im}(\lambda)\oplus N)+\mathrm{Ker}(\theta)$，所以 $(\mathrm{Im}(\lambda)\oplus K)/(\mathrm{Im}(\lambda)\oplus N)\cong K/N$ 奇异，又因 $\mathrm{Ker}(\theta)\leqslant\mathrm{Ker}(f)\ll_{\delta}P$，故 $\mathrm{Ker}(\theta)\ll_{\delta}P$，因此 $K=N$. 从而 $\mathrm{Ker}(\theta)\ll_{\delta}K$. 因为 $\pi_F f$ 是 P 到 F 的满同态，所以据同态基本定理有 $P/K\cong F$. 又因为 P 是投射模，所以 $P=K\oplus T$，$T\leqslant M$，故 $P/K\cong T$，因此 $T\cong F$ 是投射模. 又因为存在 F 到 M 的同态 g，所以存在 T 到 M 的同态 g'. 由 T 是投射模知存在 T 到 K 的同态 β 使得 $\theta\beta=g'$. 因此有 $K=\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Ker}(\theta)$，且 $\mathrm{Ker}(\theta)\ll_{\delta}K$. 由引理 1 知存在 $\mathrm{Ker}(\theta)$ 的投射半单子模 Y 使得 $K=\mathrm{Im}(\beta)\oplus Y$，因此 $P=\mathrm{Im}(\beta)\oplus Y\oplus T$. 设 π_T 是 $Y\oplus T$ 到 T 的自然投影，则 $\beta\pi_T$ 是 $Y\oplus T$ 到 $\mathrm{Im}(\beta)$ 的满同态. 又因为 P 是 D_4-模，所以对 $\mathrm{Im}(\beta)$ 上的恒等同态 id 存在 $\mathrm{Im}(\beta)$ 到 $Y\oplus T$ 的同态 h 使 $\beta\pi_T h=id$. 因此 $\mathrm{Im}(\beta)$ 同构于 $Y\oplus T$ 的直和项，故 $\mathrm{Im}(\beta)$ 是投射模，从而 $K=\mathrm{Im}(\beta)+Y$ 是投射模.

引理 2[2]　设 P 是投射模，$N\leqslant P$. 则 P/N 有投射 δ-盖 $\Leftrightarrow$ 存在 $A\leqslant N$ 和 $N\cap B\ll_{\delta}P$ 使得 $P=A\oplus B$.

推论 1　设 M 是投射模，$N\leqslant M$. 则 M 是 δ-提升模当且仅当 $M\oplus(M/N)$ 有 D_4-δ-盖.

证明"$\Leftarrow$"　设 $M\oplus(M/N)$ 有 D_4-δ-盖. 由定理 1 知 M/N 有投射 δ-盖，设为 (P,p). 再由引理 2 知存在 M 的分解 $M=A\oplus B$，$A,B\leqslant M$ 且 $B\leqslant N$，使得 $(A, p|_A)$ 是 M/N 的投射 δ-盖. 因此 $N\cap A\ll_{\delta}A$. 故 M 是 δ-提升模.

"$\Rightarrow$"　设 η 是 M 到 M/N 的自然满同态，$M=X\oplus Y$，其中 $X,Y\leqslant M$，且 $X\leqslant N$，$N\cap Y\ll_{\delta}Y$. 则 $(Y,\eta|_Y)$ 是 M 的投射 δ-盖. 若 id_M 是 M 上的恒等态射，则 $(M\oplus Y, id_M\oplus\eta|_Y)$ 是 $M\oplus(M/N)$ 的投射 δ-盖. 特别地，也是 D_4-δ-盖.

引理 3　δ-直和补模保持有限直和.

证明　类似于文献[9]中定理 1.4 的证明.

推论 2　若 M 是投射模，则 $M\oplus M$ 的任意商模有 D_4-δ-盖当且仅当 M 是 δ-提升模.

证明　"$\Rightarrow$"由推论 1 知.

"$\Leftarrow$"因为 M 是 δ-提升模，所以是 δ-直和补模. 由引理 3 知 $M\oplus M$ 是 δ-直和补模. 又因为 M 是投射模，所以由引理 2 知 $M\oplus M$ 的任意商模有投射 δ-盖. 特别地，也是 D_4-δ-盖.

定理 2　设 M 是投射模. 则下列叙述等价：

1) M^n 是 δ-完备模；

2) M^n 的任意商模有 D_4-δ-盖；

3) M^n 是 δ-提升模；

4) M 是 δ-提升模.

证明　1)$\Rightarrow$2)，3)$\Rightarrow$4) 显然.

2)$\Rightarrow$3) 由推论 1 知.

4)$\Rightarrow$1) 若 M 是 δ-提升模，则 M 是 δ-直和补

模,由引理3知M^n是δ-直和补模.因为M是投射模,所以M^n是投射模.则由推论2知M^n的任意商模有投射δ-盖.

引理4[8] 设λ是模P到模M的满同态.则λ可裂当且仅当$P\oplus M$是拟投射模.

定理3 设λ是投射模P到模M的满同态.则M有投射δ-盖当且仅当$P\oplus M$有拟投射δ-盖.

证明 "$\Rightarrow$"类似于定理1的证明.

"$\Leftarrow$"设(Q,μ)是$P\oplus M$的拟投射δ-盖,π_P是$P\oplus M$到P的自然投影.则$\pi_P\mu$是Q到P的满同态.由P的投射性知$Q\simeq P\oplus W$,其中$W=\mathrm{Ker}(\pi_P\mu)$.不失一般性,假设$Q=P\oplus M$,$\mu=id_P\oplus\mu|_W$,其中id_P是P上的恒等同态,$\mu|_W$是μ在W的限制同态.因此$\mu|_W$是W到M的满同态且$\mathrm{Ker}(\mu|_W)\ll_d W$.由$P$的投射性可知存在$P$到$W$的同态$\beta$使得$\lambda=\beta(\mu|_W)$.因此$W=\mathrm{Im}(\beta)+\mathrm{Ker}(\mu|_W)$,因为$\mathrm{Ker}(\mu|_W)\ll_\delta W$,所以由引理1知存在$\mathrm{Ker}(\mu|_W)$的投射半单子模$N$使得$W=\mathrm{Im}(\beta)\oplus N$.又因为$Q=P\oplus W$,且$Q$是拟投射模,所以$W$是拟投射模.又因为$W=\mathrm{Im}(\beta)\oplus N$,所以$\mathrm{Im}(\beta)$是拟投射模.再由引理4知$\beta$可裂,即$\mathrm{Im}(\beta)$同构于$P$的直和项,故$\mathrm{Im}(\beta)$是投射模,从而$W=\mathrm{Im}(\beta)\oplus N$是投射模.

定理4 设R是环.则下列叙述等价:

1) R是δ-半完备环;

2) 任意$n\geqslant 1$,循环R_n-模有拟投射δ-盖;

3) 存在$n>1$使任意循环R_n-模有拟投射δ-盖;

4) 每个有限生成R-模有D_4-δ-盖;

5) 每个由两个元素生成的R-模有D_4-δ-盖;

6) 任意$n\geqslant 1$,循环R_n-模有D_4-δ-盖;

7) 存在$n>1$使任意循环R_n-模有D_4-δ-盖.

证明 2)$\Rightarrow$3),1)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$5),6)$\Rightarrow$7)显然.

1)$\Rightarrow$2) 因为R是δ-半完备环,所以R_n是δ-半完备环,故对任意$n\geqslant 1$,循环R_n-模有拟投射δ-盖.

3)$\Rightarrow$1) 假设存在$n>1$使任意循环R_n-模有拟投射δ-盖.记R的一个左理想为L,L_n为R_n的左理想,$e_{ij}\in R_n$表示一个矩阵单元.则R_n/L_ne_{11}同构于$P\oplus M$,其中$M=R_ne_{11}/L_ne_{11}$,$P=\sum_{i=2}^{n}R_ne_{ii}$.定义$P$到$M$的同态$\lambda$使得$\lambda([a_{ij}])=[a_{ij}]e_{21}+L_ne_{11}$,可验证$\lambda$是$R_n$-满同态.因为$P\oplus M$有拟投射$\delta$-盖,且$P$是$R_n$-投射模,所以由定理3知$M$作为$R_n$-模有投射$\delta$-盖,设为$(W,\mu)$.因此$\mu(e_{11}W)=e_{11}M$.又因为$e_{11}M$作为$R$-模同构于$R/L$,且$W$是$R_n$-投射模,所以$e_{11}M$是$R$-投射模,从而$\mu$限制在$e_{11}W$上是$e_{11}M$的投射$\delta$-盖.因此$R/L$也有投射$\delta$-盖.

5)$\Rightarrow$1) 由推论2知R_R是δ-提升模.因为R是投射模,所以由引理2知R是δ-半完备环.

1)$\Rightarrow$6) 由1)和3)等价知.

7)$\Rightarrow$1) 类似于3)$\Rightarrow$1)的证明.

引理5[8] 设R是环.则下列叙述等价:

1) R是δ-完备环;

2) 每个半单R-模有投射δ-盖;

3) R是δ-半完备环,且对任意R-模M有$\delta(M)\ll_\delta M$(其中$\delta(M)=\sum\{L\leqslant M \mid L\ll_\delta M\}$).

定理5 设R是环.则下列叙述等价:

1) R是δ-完备环;

2) 每个R-模有D_4-δ-盖;

3) 每个有限生成的R-模有D_4-δ-盖,且对任意R-模M有$\delta(M)\ll_\delta M$.

证明 1)$\Rightarrow$2) 显然.

2)$\Rightarrow$3) 因为R是δ-完备环,所以任意半单R-模有投射δ-盖,再由引理5知3)成立.

3)$\Rightarrow$1) 因为任意有限生成的R-模有D_4-δ-盖,所以R是δ-半完备环,由引理5知1)成立.

定理6 设R是环.则下列叙述等价:

1) R是δ-半正则环;

2) 任意有限表示R-模有D_4-δ-盖.

证明 1)$\Rightarrow$2) 显然.

2)$\Rightarrow$1) 设M是有限表示R-模,g是自由模F到模M的满同态,且$F\oplus M$有D_4-δ-盖.因此由定理1知M有投射δ-盖,故R是δ-半正则环.

参考文献:

[1] DING N Q,IBRAHIM Y,YOUSIF M,*et al*. D_4-modules [J]. J Algebra Appl,2017,16(9):175016601-175016625.

[2] ZHOU Y Q. Generalization of perfect,semiperfect,and semiregular rings [J]. Algebra Colloq,2000,7(3):305-318.

[3] ANDERSON F W,FULLER K R. Rings and categories of modules [M]. 2nd ed. 北京:世界图书出版公司北京公司,2006.

[4] CLARK J,LOMP C,VANAJA N,*et al*. Lifting Modules [M]. Basel-Boston-Berlin:Birkhauser Verlag,2006.

[5] 王永铎,王 钰.强t-提升模与强t-dual Rickart模 [J].兰州理工大学学报,2016,42(5):153-156.

[6] AMIN I,IBRAHIM Y,YOUSIF M F. D_3-modules [J]. Comm Algebra,2014,42:578-592.

[7] KOSAN M T. δ-Lifting and δ-supplemented modules [J]. Algebra Colloq,2007,14(1):53-60.

[8] GOLAN J S. Characterization of rings using quasiprojective modules [J]. Proc AMS,1971,28:337-343.

[9] HARMANCI A,KESKIN D,SMITH P F. On $\oplus$-supplemented modules [J]. Acta math Hungar,1999,83(1/2):161-169.