

文章编号: 1673-5196(2021)01-0105-08

新分数阶混沌系统的电路设计和同步控制

颜闽秀^{1,2}, 徐 辉¹

(1. 沈阳化工大学 信息工程学院, 辽宁 沈阳 110142; 2. 工业环境-资源协同控制与优化技术辽宁省高校重点实验室, 辽宁 沈阳 110142)

摘要: 针对一个新的仅含一个非线性项的三维分数阶混沌系统, 首先通过分析系统的相轨迹图、李雅普诺夫指数谱、功率谱以及庞加莱截面, 验证了系统的混沌特性; 其次研究了系统平衡点的稳定性以及系统关于分数阶次和参数的分岔图, 结果表明系统具有丰富的混沌特性; 然后设计出系统的分数阶混沌电路并在软件 Multisim 中进行模拟实验, 实验结果验证了新分数阶混沌系统实现的可能性; 最后研究了带有扰动的、不确定参数的分数阶系统的同步问题, 设计了基于自适应的滑模控制器、未知扰动和不确定参数的自适应律, 实现了在未知扰动上界未知和参数不确定情况下的系统的同步控制。

关键词: 分数阶; 混沌电路; 自适应滑模控制; 一个非线性项

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

New fractional chaotic system circuit design and synchronization control

YAN Min-xiu^{1,2}, XU Hui¹

(1. College of Information Engineering, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang 110142, China, 2. Key Laboratory for Industrial Environment-Resources Cooperative Control and Optimization Technology (University of Liaoning Province), Shenyang 110142, China)

Abstract: For a new three-dimensional fractional chaotic system with only one nonlinear term, chaotic characteristics of the system are verified firstly by analyzing phase trajectory, Lyapunov exponent spectrum, power spectrum and Poincare section. Secondly, the stability of the equilibrium point of the system and the bifurcation diagram of the system with respect to fractional order and parameters are studied. The bifurcation diagram shows that the system has abundant chaotic characteristics. Then, a fractional-order chaotic circuit of the system is designed and simulated in software Multisim. The simulation results verify the possibility of realizing the new fractional chaotic system. Finally, the synchronization problem of fractional order systems with disturbances and uncertain parameters is studied. A sliding mode controller based on adaptive control is then designed, and the adaptive laws of unknown disturbances and uncertain parameters are explained reasonably. The synchronization of the system can be realized in the case of both unknown upper bound of the disturbances and parameter uncertainty.

Key words: fractional order; chaotic circuit; adaptive sliding mode control; a non-linear term

分数微积分的发展由于其固有的复杂性和缺乏预见性的应用, 直到近几十年才应用于一些工程中^[1-4]. 分数阶系统模型能够简洁地描述出许多具有记忆特性的系统和一些复杂的材料, 如振荡器^[5]、光伏发电模型^[6]、超级电容器建模^[7]、土壤盐碱化程度分类^[8]等. 相较于整数阶模型, 它能够合理准确地描述现实世界的物理现象, 这促进了混沌领域的学者

对分数阶混沌理论及分数阶混沌系统模型的探索和研究.

除了经典的整数阶混沌系统的分数阶模型^[9-15]被研究外, 不同的新分数阶混沌系统被学者提出, Gholamin 等^[16]提出了一个三维分数阶混沌系统, Zhang 等^[17]提出了改变一个参数即可产生一至四翼的分数阶混沌系统, Munoz-Pacheco 等^[18]提出了变量可调的分数阶混沌系统, Zhou 等^[19]提出了具有复杂共存吸引子的分数阶混沌系统. 这些研究成果丰富了分数阶混沌理论和分数阶混沌系统的数量, 促进了分数阶混沌系统在工程方面的应用. 在混

收稿日期: 2019-09-16

基金项目: 国家科技部中国-马其顿政府间科技合作项目, 辽宁省教育厅项目(LZ2016006)

作者简介: 颜闽秀(1972-), 女, 福建仙游人, 博士, 副教授.

沌领域的研究中,混沌同步控制一直是研究的热点. 为了实现驱动系统与响应系统同步,这方面的学者成功地提出了各种控制方案,如 PID 控制^[20]、反馈控制^[21]、主动控制^[22]、状态观测器控制^[23]、投影同步控制^[24]、滑模同步控制^[25]、鲁棒控制^[26]和自适应控制^[27-29]等.

本文基于 Caputo 定义提出了一个新的、仅含一个非线性项的三维分数阶混沌系统,采用预估校正法^[30]对系统进行数值仿真,发现它能够产生复杂的双涡卷混沌吸引子. 相较于一般的混沌系统,它的结构更为简单,仅含一个非线性项,且易于实现. 在通过理论分析和数值仿真验证了系统的混沌特性后,为验证系统实现的可能性,文中设计了系统的分数阶混沌电路并于 Multisim 中进行模拟实验,实验结果验证了系统实现的可能性. 最后针对带有未知参数和扰动的分数阶系统的同步问题,设计了基于自适应的滑模控制器,在扰动上界未知、系统参数不确定的情况下,实现了系统的同步控制.

1 系统模型

本文在研究 Silnikov 定理的应用时,提出了在 Caputo 定义下的同量阶分数阶混沌系统,其模型为

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = -ax + z \\ \frac{d^q y}{dt^q} = y - x^2 z \\ \frac{d^q z}{dt^q} = -x + y - z \end{cases} \quad (1)$$

其中: $0 < q \leq 1$ 为系统的阶数;实数 a 是系统的参数. 当 $q = 0.98, a = 0.5$ 时,系统存在混沌吸引子. 取初始值为 $(0.5, 0.5, 0.5)$,采用预估校正算法来进行仿真,设置步长为 0.01 ,得到的吸引子及其平面投影图如图 1~3 所示.

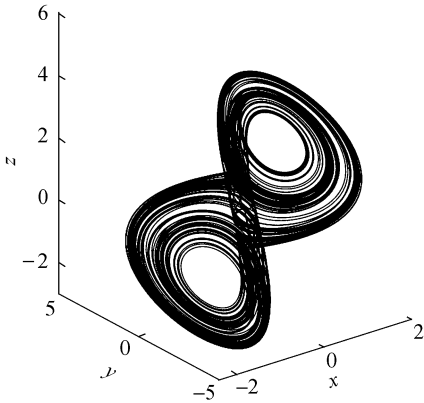


图 1 混沌吸引子
Fig. 1 Chaos attractor

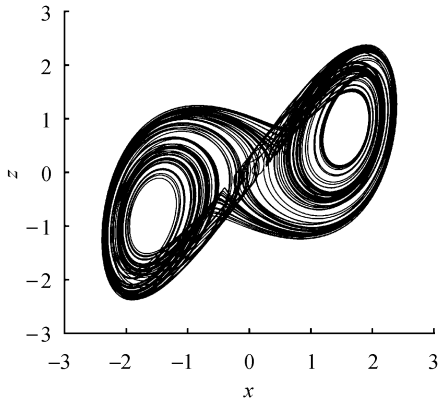


图 2 x-z 相图
Fig. 2 x-z phase diagram

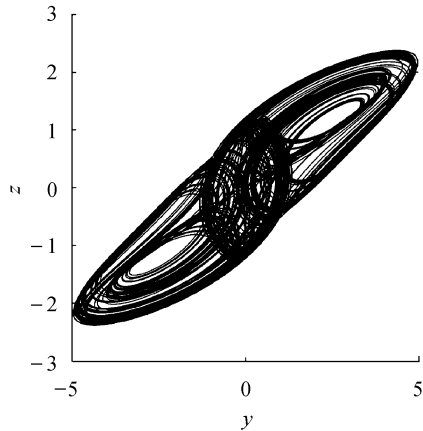


图 3 y-z 相图
Fig. 3 y-z phase diagram

由图 1~3 可以看出,系统(1)的吸引子的几何形状非常复杂,具有很强的吸引性、复杂的折叠和拉伸轨线,所有轨线被限定在一个特定的区域内.

为验证系统的混沌特性,使用计算机求出分数阶混沌系统的李雅普诺夫指数,得到 $\lambda_{L1} = 0.112\ 5$, $\lambda_{L2} = 0$, $\lambda_{L3} = -0.642\ 1$,它们随时间变化的曲线如图 4 所示.

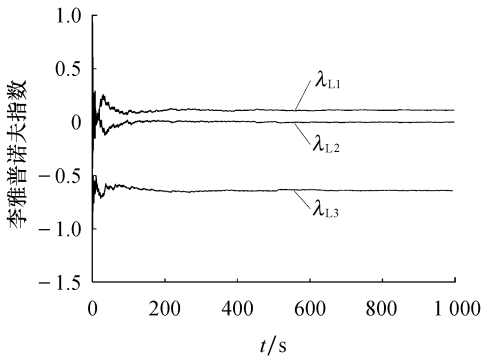


图 4 李雅普诺夫指数
Fig. 4 Lyapunov exponents

再由下式计算出系统的李雅普诺夫维数 D_L :

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{L(j+1)}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{L_i} \tag{2}$$

其中 j 为满足下式的最大整数:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_{L_i} > 0 \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_{L_i} < 0 \tag{3}$$

得到:

$$\begin{cases} j=2 \\ D_L = 2 + \frac{0.112\ 5}{|-0.642\ 1|} = 2.175\ 2 \end{cases} \tag{4}$$

由上述计算可知,系统的三个李雅普诺夫指数中一个为正,一个为负,另外一个为 0,且李雅普诺夫维数为分数,所以表明系统(1)为混沌系统.

为进一步验证系统的混沌特性,利用计算机绘制出系统关于变量 x 的功率谱(如图 5 所示)以及 x - y 平面关于 $z=0$ 的庞加莱截面图(如图 6 所示).

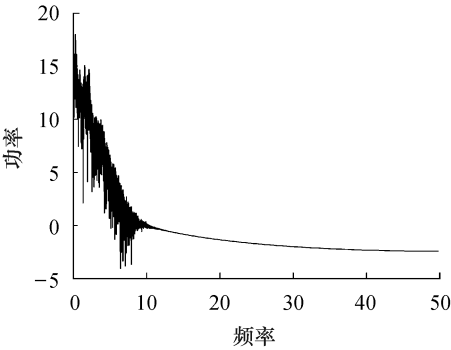


图 5 功率谱

Fig. 5 Power spectrum

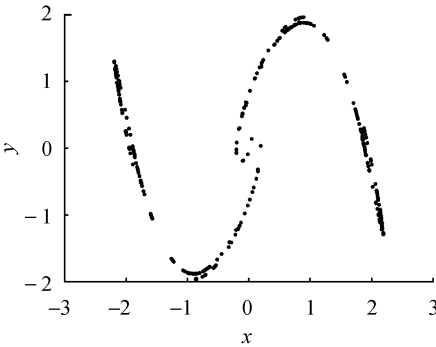


图 6 庞加莱截面

Fig. 6 Poincare surface of section

从图 5 和图 6 可以看出,系统的功率谱是连续谱,没有明显的波峰;庞加莱截面图并不是一条封闭的曲线,而是由密集点构成的具有吸引子轮廓的曲线.这再次表明了系统(1)为混沌系统.

2 平衡点及其稳定性

令式(1)等式左边为 0,得到:

$$\begin{cases} 0 = -ax + z \\ 0 = y - x^2 z \\ 0 = -x + y - z \end{cases} \tag{5}$$

求解方程组(5),解得方程的三个平衡点,分别为

$$\begin{cases} E_1 = (0,0,0) \\ E_2 = \left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}, \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}, \sqrt{a(a+1)} \right) \\ E_3 = \left(-\sqrt{\frac{a+1}{a}}, -\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}, -\sqrt{a(a+1)} \right) \end{cases} \tag{6}$$

代入数据 $a=0.5$,得到:

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,0,0) \\ E_2 &= (1.732, 2.598, 0.866) \\ E_3 &= (-1.732, -2.598, -0.866) \end{aligned}$$

求得系统的 Jacobian 矩阵 J 为

$$J = \begin{bmatrix} -a & 0 & 1 \\ -2xz & 1 & -x^2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\text{令 } \det(\lambda I - J) = 0, \text{ 求得其特征多项式为} \\ &f(\lambda) = \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 \end{aligned} \tag{8}$$

其中: $A_0 = ax^2 + 2xz - a - 1, A_1 = x^2, A_2 = a$.

将平衡点 $E_1 = (0,0,0)$ 代入式(7)进行线性化处理,得到 Jacobian 矩阵为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

再将平衡点 E_1 代入式(8),求得式(9)的特征值,为 $\lambda_{11} = 1, \lambda_{12,13} = -0.75 \pm 0.968\ 2i$,由特征值可知平衡点 E_1 是指标为 1 的不稳定的鞍点.

同理,在平衡点 E_2, E_3 处线性化得到 Jacobian 矩阵为

$$J_{2,3} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

求得式(10)的特征值为 $\lambda_{21} = \lambda_{31} = -0.894\ 7, \lambda_{22} = \lambda_{32} = 0.197\ 3 + 1.82i, \lambda_{23} = \lambda_{33} = 0.197\ 3 - 1.82i$.由特征值可知平衡点 E_2, E_3 是指标为 2 的不稳定的鞍点.

3 分岔图

由第 2 节求出的特征值以及相关的分数阶稳定性理论可知,下式为系统(1)产生混沌的必要条件:

$$q > |\arg \lambda_{22,32}| = |\arg \lambda_{23,33}| = 0.931\ 3 \quad (11)$$

系统(1)所选取的阶次 $q = 0.98 > 0.931\ 3$, 符合式(11). 为进一步研究阶次 q 对系统(1)的动力学特性的影响, 将系统的阶次 q 作为系统的分岔参数, 绘制并分析系统关于 q 的分岔图.

固定参数 a , 令 $q \in [0.92, 1]$, 初始值为 $(0.5, 0.5, 0.5)$, 绘制出系统关于参数 q 的分岔图如图 7 所示.

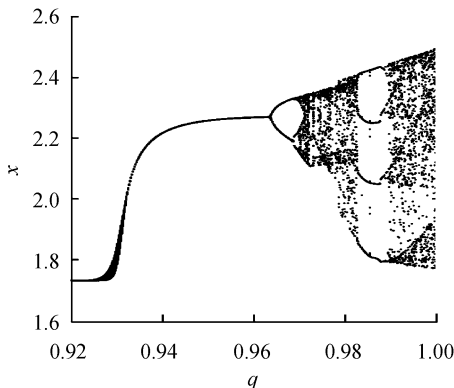


图 7 q - x 分岔
Fig. 7 q - x bifurcation diagrams

从图 7 可以看出, 在 $[0.97, 0.983] \cup [0.99, 1]$ 时, 系统处于混沌状态. 在 $q = 0.963\ 5$ 处出现叉式分岔, 并在 $q = 0.968\ 4$ 处发生倍周期分岔, 最终系统经过一系列的倍周期分岔进入混沌状态. 之后在 $q = 0.982\ 7$ 处发生鞍结分岔, 并于 $q = 0.987\ 5$ 处发生叉式分岔, 进而在 $q = 0.988\ 5$ 处发生倍周期分岔, 最后经一系列倍周期分岔系统进入混沌状态.

现在, 为分析系统参数 a 对系统动力学特性的影响, 绘制并分析系统关于参数 a 的分岔图.

固定参数 q , 令 $a \in [0.3, 1.1]$, 初始值为 $(0.5, 0.5, 0.5)$, 绘制得到系统关于参数 a 的分岔图如图 8 所示.

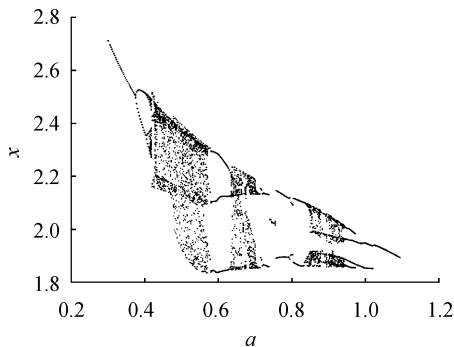


图 8 a - x 分岔
Fig. 8 a - x bifurcation diagram

从图 8 可以看出, 当参数在区间 $[0.43, 0.573] \cup [0.632, 0.7] \cup [0.85, 0.88] \cup [0.9, 0.94]$ 时, 分岔图中出现由密集点构成的区域, 系统处于混沌状态.

考虑到分数阶混沌系统(1)中含有 $x^2 z$ 这种交叉高阶项时, 系统(1)可能对 x 变量的初始值非常敏感. 现在改变 x 变量的初始值 x_0 绘制分岔图, 来确认该模型动力学特性是否依赖于 x 变量的初始值, 实现混沌与周期模态的切换.

固定 $q = 0.98$, $a = 0.5$, 取初始值 $(x_0, 0.5, 0.5)$, 其中 $x_0 = [0.45, 0.65]$, 绘制 x_0 - x 分岔图, 如图 9 所示.

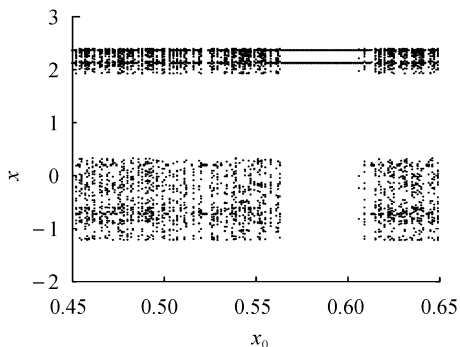


图 9 x_0 - x 分岔
Fig. 9 x_0 - x bifurcation diagram

由图 9 可知, 系统的混沌特性受到变量 x 初始值的影响. 特别地, 当 x_0 在区间 $[0.57, 0.62]$ 时, 分数阶系统(1)处于周期 2 模态.

取 $x_0 = 0.6$, 则初始值为 $(0.6, 0.5, 0.5)$, 此时系统会产生周期 2 轨道, 如图 10 所示.

由上述分析可知, 系统具有丰富的混沌特性.

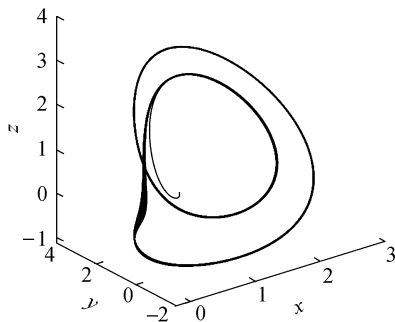


图 10 周期 2 轨道
Fig. 10 Orbit of period 2

4 电路设计

通过设计分数阶混沌电路进行模拟来判断系统(1)是否具有实现的可能性, 并对上述理论分析和仿真结果进行验证. 电路将采用线性电阻、运算放大

器、模拟乘法器(增益为 1)以及图 11 所示的链型电路. 其中模拟乘法器用于实现系统中的非线性项, 运算放大器及其相关电阻用于实现加、减运算, 链型电路用来实现 $1/s^{0.98}$ 的单元电路.

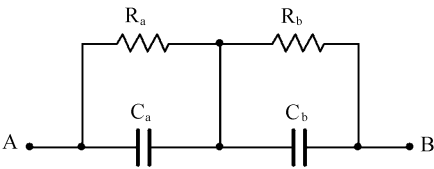


图 11 $1/s^{0.98}$ 的单元电路
Fig. 11 Unit circuit of $1/s^{0.98}$

当分数阶次 $q=0.98$ 时, $1/s^{0.98}$ 的波特图近似式为

$$\frac{1}{s^{0.98}} = \frac{1.297\ 4(s + 1\ 125)}{(s + 142\ 3)(s + 0.011\ 25)} \quad (12)$$

链型电路中, A 与 B 之间的传递函数 $F(s)$ 为

$$F(s) = \frac{1/C_a}{s + 1/R_a C_a} + \frac{1/C_b}{s + 1/R_b C_b} = \frac{1}{C_0} \left[\frac{\left(\frac{C_0 C_a + C_0 C_b}{C_a C_b} \right) \left(s + \frac{R_a + R_b/R_a R_b}{C_a + C_b} \right)}{(s + 1/R_a C_a)(s + 1/R_b C_b)} \right] \quad (13)$$

式中: C_0 为单位参数, 取 $C_0=1\ \mu\text{F}$, $H(s)=F(s)C_0=1/s^{0.98}$, 将式(13)与式(12)对比可以得到

$$\begin{cases} R_a = 91.187\ \text{M}\Omega, & R_b = 190.933\ \Omega \\ C_a = 0.975\ 3\ \mu\text{F}, & C_b = 3.680\ 6\ \mu\text{F} \end{cases} \quad (14)$$

由式(14)可知:

$$\begin{cases} R_1 = R_3 = R_5 = 91.187\ \text{M}\Omega \\ R_2 = R_4 = R_6 = 190.933\ \Omega \\ C_1 = C_3 = C_5 = 0.975\ 3\ \mu\text{F} \\ C_2 = C_4 = C_6 = 3.680\ 6\ \mu\text{F} \end{cases} \quad (15)$$

通过以上对 $q=0.98$ 阶单元电路的分析, 用 Multisim 设计实现该电路的原理图如图 12 所示, 图中 $U_1=x, U_2=y, U_3=z$.

复频域中分数阶混沌系统的方程表示为

$$\begin{cases} \frac{X(S)}{H(S)} = \frac{1}{C_0} \left(-\frac{1}{R_7} X(S) + \frac{R_8}{R_9 R_{10}} Z(S) \right) \\ \frac{Y(S)}{H(S)} = \frac{1}{C_0} \left(\frac{R_{11}}{R_{12} R_{13}} Y(S) - \frac{1}{R_{17}} L(x^2 z) \right) \\ \frac{Z(S)}{H(S)} = \frac{1}{C_0} \left(-\frac{1}{R_{19}} X(S) + \frac{R_{14}}{R_{15} R_{16}} Y(S) - \frac{1}{R_{18}} Z(S) \right) \end{cases} \quad (16)$$

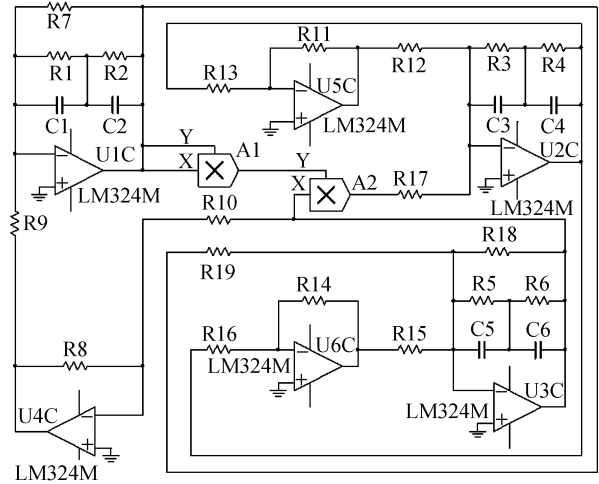


图 12 分数阶混沌系统电路原理

Fig. 12 Circuit schematic diagram of fractional order chaotic system

将式(16)与式(1)比较, 可作如下取值:

$$R_7 = 2\ 000\ \text{k}\Omega, \quad R_i = 1\ 000\ \text{k}\Omega, \quad i = 8, \dots, 19 \quad (17)$$

基于上述数据进行电路模拟, 模拟结果如图 13 和图 14 所示.

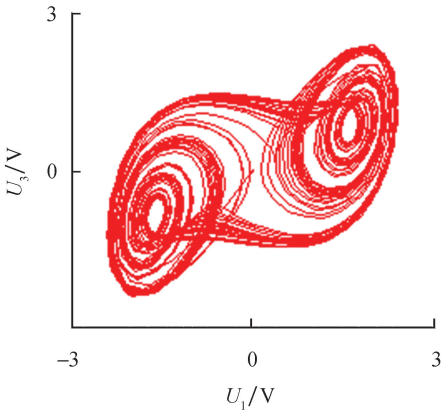


图 13 U_1-U_3 相图

Fig. 13 The phase trajectory of U_1-U_3

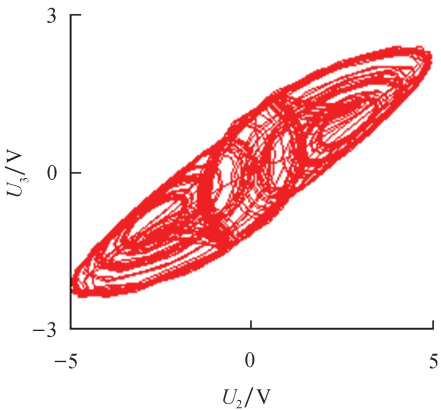


图 14 U_2-U_3 相图

Fig. 14 The phase trajectory of U_2-U_3

从图 13 和图 14 可以看出,电路模拟结果与上文数值仿真结果一致,表明分数阶混沌系统具有实现的可能性.

5 自适应滑模同步控制

5.1 滑模控制器及参数自适应律的设计

将系统(1)作为驱动系统,并写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^q x_1}{dt^q} = -ax_1 + x_3 \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} = x_2 - x_1^2 x_3 \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} = -x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \quad (18)$$

其中参数 $a=0.5$, 阶次 $q=0.98$. 取响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q y_1}{dt^q} = -a_1 y_1 + y_3 + r_1 + u_1 \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} = y_2 - y_1^2 y_3 + r_2 + u_2 \\ \frac{d^q y_3}{dt^q} = -y_1 + y_2 - y_3 + r_3 + u_3 \end{cases} \quad (19)$$

式中: a_1 为 a 的估计参数; u_i 为自适应滑模控制器; r_i 为干扰; $i=1,2,3$.

定义同步误差 $e_i = y_i - x_i$, 未知参数估计误差 $e_a = a_1 - a$. 由式(19)减去式(18)得到误差系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt^q} = -a_1 e_1 - e_a x_1 + e_3 + r_1 + u_1 \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = e_2 + \gamma + r_2 + u_2 \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} = -e_1 + e_2 - e_3 + r_3 + u_3 \end{cases} \quad (20)$$

式中: $\gamma = x_1^2 x_3 - y_1^2 y_3$.

为便于滑模控制器的设计,作下面的假设.

假设 1: 干扰有界,但是未知,即 $|r_i| \leq d_i$, d_i 未知.

设计滑模面函数为

$$s_i = e_i + k_{10} D_t^{-q} (|e_i|^\mu \operatorname{sgn}(e_i)) \quad (21)$$

式中: ${}_0 D_t^{-q}$ 表示 Caputo 型积分, 参数 $k_1 > 0$, $0 < \mu < 1$.

定义 D_i 为扰动上界 d_i 的估计值, 其估计误差为 $e_{d_i} = D_i - d_i$, 设计 D_i 的自适应律为

$$\frac{d^q D_i}{dt^q} = |s_i| \quad (22)$$

由于常数的 q 阶 Caputo 导数为 0, 因此对于干扰上界的误差, 有

$$\frac{d^q e_{d_i}}{dt^q} = \frac{d^q (D_i - d_i)}{dt^q} = \frac{d^q D_i}{dt^q} \quad (23)$$

针对未知参数, 设计其自适应律为

$$\frac{d^q e_a}{dt^q} = x_1 s_1 - k_2 e_a \quad (24)$$

式中: 控制参数 $k_2 > 0$. 最后设计自适应控制器为

$$\begin{cases} u_1 = a_1 e_1 + e_2 + f_1 \\ u_2 = -e_2 - \gamma + f_2 \\ u_3 = e_3 + e_4 + f_3 \\ u_4 = -b e_1 + e_4 + f_4 \end{cases} \quad (25)$$

式中: $f_i = -(D_i + k_1 |e_i|^\mu) \operatorname{sgn}(s_i) - k_3 s_i$, $i=1,2,3,4$; 控制参数 $k_3 > 0$.

定理 1 在干扰上界的自适应律式(22,23), 参数自适应律式(24)以及自适应控制器式(25)的作用下, 响应系统(19)将与驱动系统(18)实现同步.

证明 构造如下的李雅普诺夫函数:

$$V = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 s_i^2 + \sum_{i=1}^3 e_{d_i}^2 + e_a^2 \right)$$

对其求 q 阶的分数阶导数得到

$$\frac{d^q V}{dt^q} = \sum_{i=1}^3 s_i \frac{d^q s_i}{dt^q} + \sum_{i=1}^3 e_{d_i} \frac{d^q e_{d_i}}{dt^q} + e_a \frac{d^q e_a}{dt^q} \quad (27)$$

将式(21,24)代入式(27)得

$$\begin{aligned} \frac{d^q V}{dt^q} = & \sum_{i=1}^3 s_i \left[\frac{d^q e_i}{dt^q} + k_1 |e_i|^\mu \operatorname{sgn}(e_i) \right] + \\ & \sum_{i=1}^3 e_{d_i} |s_i| + e_a (x_1 s_1 - k_2 e_a) \end{aligned} \quad (28)$$

将扰动估计误差 $e_{d_i} = D_i - d_i$ 、误差系统(20)、控制器(25)代入式(28), 得到

$$\begin{aligned} \frac{d^q V}{dt^q} = & \sum_{i=1}^3 s_i r_i - \sum_{i=1}^3 s_i D_i \operatorname{sgn}(s_i) - \\ & \sum_{i=1}^3 s_i k_1 |e_i|^\mu \operatorname{sgn}(s_i) + \sum_{i=1}^3 s_i k_1 |e_i|^\mu \operatorname{sgn}(e_i) - \\ & \sum_{i=1}^3 k_3 s_i^2 + \sum_{i=1}^3 (D_i - d_i) |s_i| - k_2 e_a^2 = \\ & \sum_{i=1}^3 s_i r_i - \sum_{i=1}^3 |s_i| D_i - \sum_{i=1}^3 |s_i| k_1 |e_i|^\mu + \\ & \sum_{i=1}^3 s_i k_1 |e_i|^\mu \operatorname{sgn}(e_i) - \sum_{i=1}^3 k_3 s_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^3 (D_i - d_i) |s_i| - k_2 e_a^2 \end{aligned} \quad (29)$$

计算式(29), 并对其进行放缩:

$$\begin{aligned} \frac{d^q V}{dt^q} \leq & \sum_{i=1}^3 (s_i r_i - d_i |s_i|) + \\ & \sum_{i=1}^3 [-|s_i| + s_i \operatorname{sgn}(e_i)] k_1 |e_i|^\mu \end{aligned} \quad (30)$$

令 $T_i = -|s_i| + s_i \operatorname{sgn}(e_i)$, 有下式成立:

$$\begin{cases} e_i \geq 0, s_i \geq 0 \Rightarrow T = -s_i + s_i = 0 \\ e_i \geq 0, s_i \leq 0 \Rightarrow T = s_i + s_i \leq 0 \\ e_i \leq 0, s_i \geq 0 \Rightarrow T = -s_i - s_i \leq 0 \\ e_i \leq 0, s_i \leq 0 \Rightarrow T = s_i - s_i = 0 \end{cases} \quad (31)$$

由式(31)可知

$$T_i = -|s_i| + s_i \operatorname{sgn}(e_i) \leq 0 \quad (32)$$

假设 1 中 $|r_i| \leq d_i$, 又因为 $s_i \leq |s_i|$, 所以可得

$$s_i r_i - d_i |s_i| \leq 0 \quad (33)$$

联立式(30,32,33), 可得

$$\frac{d^q V}{dt^q} \leq 0 \quad (34)$$

综上所述,定理得证.

5.2 同步仿真实验

为验证所设计的控制器具有可行性和有效性, 本文采用预估校正算法并使用 Matlab 进行数值仿真. 取驱动系统的初始值为 $(0.8, -0.5, 0.4)$, 响应系统的初始值为 $(-0.2, 0.5, -0.1)$, 并取干扰 $r_1 = 0.5 \sin t, r_2 = \sin t, r_3 = \cos t$, 估计参数 $a_1 = 5$, 控制参数 $k_i = 20 (i = 1, 2, 3), \mu = 0.5$.

基于上述数据进行模拟仿真, 同步误差的仿真结果如图 15 所示, 参数 a_1 的识别过程如图 16 所示.

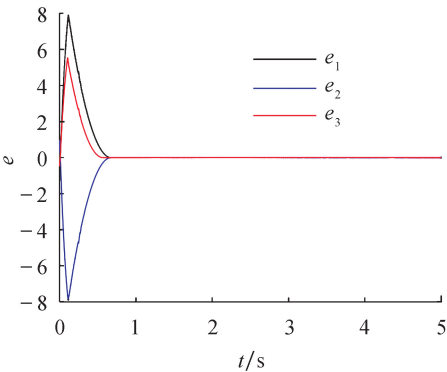


图 15 同步误差
Fig. 15 Synchronization error

从图 15 可以看出, 系统的同步误差很快趋于 0, 主从系统实现了同步. 从图 16 可以看出, 响应系统的估计参数在较短的时间内达到稳定且趋于主系统的参数 $a = 0.5$. 这验证了本文所设计的自适应滑模控制器以及自适应律的可行性和有效性.

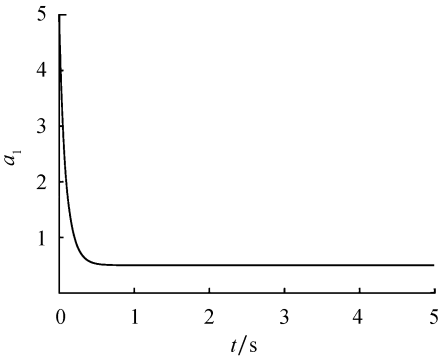


图 16 参数 a_1 的辨识过程
Fig. 16 Identification process of parameter a_1

6 结论

本文提出了一个仅含有一个非线性项的新三维分数阶混沌系统, 通过系统的相轨迹图、李雅普诺夫指数谱、功率谱、庞加莱截面、平衡点的稳定性以及系统关于分数阶次和参数的分岔图等来分析系统的动力学特性. 紧接着, 设计了系统的分数阶混沌电路并进行模拟实验去验证系统的可实现性. 最后研究了带有扰动以及未知参数的分数阶系统的同步和参数识别问题, 设计出合适的自适应滑模控制器以及未知参数和扰动的自适应律. 基于上述研究结果得出如下结论:

- 1) 提出的三维分数阶系统是混沌系统, 结构简单, 仅含有一个非线性项, 具有丰富的混沌特性.
- 2) 当该系统的阶次或参数变化时, 系统的混沌特性更为丰富.
- 3) 该系统具有电路实现的可能性, 在保密通信等领域具有潜在的应用价值.
- 4) 设计的自适应滑模控制器、参数的自适应律以及扰动的自适应律是切实可行且有效的, 不需要知道扰动的上界即能实现混沌系统的同步控制以及系统不确定参数的辨识, 更符合实际的工程应用.

参考文献:

[1] KAYALVIZHI S, MALARVIZHI S. A novel encrypted compressive sensing of images based on fractional order hyper chaotic Chen system and DNA operations [J]. Multimedia Tools and Applications, 2020, 79: 3957-3974.

[2] ZOUAD F, KEMIH K, HAMICHE H. A new secure communication scheme using fractional order delayed chaotic system: design and electronics circuit simulation [J]. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2019, 99(3): 619-632.

[3] LI R G, WU H N. Secure communication on fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control with teaching-learning-feedback-based optimization [J]. Nonlinear Dy-

- namics, 2019, 95(2): 1221-1243.
- [4] LI P, XU J, MOU J, *et al.* Fractional-order 4D hyperchaotic memristive system and application in color image encryption [J]. EURASIP Journal on Image and Video Processing, 2019, 22: 1491.
 - [5] SAID L A, RADWAN A G, MADIAN A H, *et al.* Three fractional-order-capacitors-based oscillators with controllable phase and frequency [J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2017, 26(10): 17501601-175016022.
 - [6] ABDELATY A M, RADWAN A G, ELWAKIL A S, *et al.* Transient and steady-state response of a fractional-order dynamic PV model under different loads [J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2018, 27(2): 18500231-1850023-25.
 - [7] ELWAKIL A S, ALLAGUI A, FREEBORN T J, *et al.* Further experimental evidence of the fractional-order energy equation in supercapacitors [J]. AEU-International Journal of Electronics and Communications, 2017, 78: 209-212.
 - [8] TIAN A H, FU C B, XIONG H G, *et al.* Innovative intelligent methodology for the classification of soil salinization degree using a fractional-order master-slave chaotic system [J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 2019, 29(2): 1950026.
 - [9] GRIGORENKO I, GRIGORENKO E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system [J]. Physical Review Letters, 2003, 91(3): 034101.
 - [10] LI C, CHEN G. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2004, 341: 55-61.
 - [11] LI C, CHEN G. Chaos in the fractional order Chen system and its control [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22(3): 549-554.
 - [12] DENG W H, LI C P. Chaos synchronization of the fractional Lü system [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005, 353: 61-72.
 - [13] PETRAS I. A note on the fractional-order Chua's system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 38(1): 140-147.
 - [14] GAO X, YU J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 24(4): 1097-1104.
 - [15] LU J J, LIU C X. Realization of fractional-order Liu chaotic system by circuit [J]. Chinese Physics, 2007, 16(6): 1586.
 - [16] GHOLAMIN P, SHEIKHANI A H R. Dynamical analysis of a new three-dimensional fractional chaotic system [J]. Pragma, 2019, 92(6): 151.
 - [17] ZHANG S, ZENG Y, LI Z. One to four-wing chaotic attractors coined from a novel 3D fractional-order chaotic system with complex dynamics [J]. Chinese Journal of Physics, 2018, 17: 31435.
 - [18] MUNOZ-PACHECO J M, ZAMBRANO-SERRANO E, CH V, *et al.* A fractional order chaotic system with a 3D grid of variable attractors [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 113: 69-78.
 - [19] ZHOU C, LI Z, ZENG Y, *et al.* A novel 3D fractional-order chaotic system with multifarious coexisting attractors [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2019, 29(1): 1-16.
 - [20] SUMATHI R, UMASANKAR P. Optimal design of fractional order PID controller for time-delay systems: an IWLQR technique [J]. International Journal of General Systems, 2018, 47(1): 1-17.
 - [21] SOUKKOU A, BOUKABOU A, GOUTAS A. Generalized fractional-order time-delayed feedback control and synchronization designs for a class of fractional-order chaotic systems [J]. International Journal of General Systems, 2018, 47(7/8): 679-713.
 - [22] HUANG C, CAO J. Active control strategy for synchronization and anti-synchronization of a fractional chaotic financial system [J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2017, 473(2): 526-537.
 - [23] LI Y, HOU B. Observer-based sliding mode synchronization for a class of fractional-order chaotic neural networks [J]. Advances in Difference Equations, 2018(1): 146.
 - [24] TIRANDAZ H, KARAMIMOLLAEE A. Combination synchronization of multiple chaotic systems with uncertain parameters using adaptive hybrid modified projective control method [J]. Acta Physica Polonica B, 2018, 49(1): 59.
 - [25] YANG R, ZHENG W X. Two-dimensional sliding mode control of discrete-time fornasini-marchesini systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(9): 3943-3948.
 - [26] ZUÑIGA-AGUILAR C J, GÓMEZ-AGUILAR J F, ESCOBAR-JIMÉNEZ R F, *et al.* Robust control for fractional variable-order chaotic systems with non-singular kernel [J]. European Physical Journal Plus, 2018, 133: 13.
 - [27] ZHANG F, SUN K, CHEN Y, *et al.* Parameters identification and adaptive tracking control of uncertain complex-variable chaotic systems with complex parameters [J]. Nonlinear Dynamics, 2019(95): 3161-3176.
 - [28] LI R G, WU H N. Adaptive synchronization control based on QPSO algorithm with interval estimation for fractional-order chaotic systems and its application in secret communication [J]. Nonlinear Dynamics, 2018(92): 935-959.
 - [29] BEHINFARAZ R, GHAEMI S, KHANMOHAMMADI S. Adaptive synchronization of new fractional-order chaotic systems with fractional adaption laws based on risk analysis [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(6): 1772-1785.
 - [30] DIETHELM K, FORD N J, FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1/2/3/4): 3-22.