

文章编号: 1673-5196(2022)03-0146-08

相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模

王永铎*, 杜晓微

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 引入了相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模和相对于理想 I 的 R -投射模的概念, 研究了它们的基本性质, 统一了 N -投射模, τ - N -投射模和 Rad - N -投射模的一系列结论.

关键词: 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模; 相对于理想 I 的 R -投射模; 半单模

中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A

N -projective modules relative to a fully invariant submodule F of module N

WANG Yong-duo, DU Xiao-wei

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: The concepts of N -projective modules relative to a fully invariant submodule F of module N and R -projective modules relative to an ideal I are introduced. Basic properties of these modules are studied, some conclusions of N -projective modules, τ - N -projective modules and Rad - N -projective modules are unified.

Key words: N -projective modules relative to a fully invariant submodule F of module N ; R -projective modules relative to an ideal I ; semisimple modules

在本文中, R 都是有单位元的结合环, 所有的模都是右 R -模. $N \subseteq M$ 表示 N 是 M 的子集, $N \leq M$ 表示 N 是 M 的子模, $N \triangleleft M$ 表示 N 是 M 的完全不变子模, $N \leq^{\oplus} M$ 表示 N 是 M 的直和项, $\text{End}_R(M)$ 表示模 M 的自同态环, $\text{Hom}_R(M, N)$ 表示 M 到 N 的同态集, $E(M)$ 、 $\text{Rad}(M)$ 、 $\text{Soc}(M)$ 和 $\tau(M)$ 分别表示右 R -模 M 的内射包、根、基座和预根. I 、 $\text{Rad}(R)$ 和 $\tau(R)$ 分别表示环 R 的理想、根和预根.

投射模是模论和同调代数中的三大重要模类之一, 关于投射模的研究是同调代数最基本也是最核心的内容. 随着同调代数的发展, 国内外很多数学家开始从事投射模的推广工作, 他们从不同的角度对投射模进行了推广, 得到了很多重要的概念^[1-5], 丰富了投射模的理论体系. 2012 年有学者提出了 τ - N -投射模和 τ -投射模的概念^[1]. 设 M 和 N 是右 R -模, 称 M 是 τ - N -投射模, 若对任意满同态 $f: N \rightarrow L$

和任意同态 $h: M \rightarrow L$, 其中 L 是 $N/\tau(N)$ 的像 (等价于 $\tau(N) \subseteq \ker f$), 存在同态 $g: M \rightarrow N$ 使得 $h = fg$. 称 M 是 τ -投射模, 若 M 是 τ - R -投射的. 2013 年, Amin 等^[2]提出了 Rad - N -投射模和 Rad -投射模的概念, 并用它们刻画了半完备环、完备环等重要的环类. 以上研究对经典的投射模做了很好的推广, 对丰富投射模理论做出了贡献. 受文献^[1-7]的启发, 为了统一上述概念, 本文很自然地考虑将上述概念中的 $\tau(N)$, $\text{Rad}(N)$ 换为 N 的任意完全不变子模去研究, 进而引入相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模和相对于理想 I 的 R -投射模的概念. 设 M, N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 称 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 若对任意满同态 $f: N \rightarrow L$ 和任意同态 $h: M \rightarrow L$, 其中 L 是 N/F 的像 (等价于 $F \subseteq \ker f$), 存在同态 $g: M \rightarrow N$ 使得 $h = fg$. 显然, 当 $F = 0$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 N -投射模; 当 $F = \tau(N)$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 τ - N -投射模; 当 $F = \text{Rad}(N)$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 Rad - N -投射模; 当 $F = N$ 时, 任意右 R -模都是相对于模 N 的完全不变子

收稿日期: 2020-11-19

基金项目: 国家自然科学基金(11861043)

通讯作者: 王永铎(1974-), 男, 甘肃靖远人, 博士, 教授.

Email: ydwan@lut.edu.cn

模 F 的 N -投射模. 本文研究了相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模和相对于理想 I 的 R -投射模的一些基本性质, 统一了 N -投射模, τ - N -投射模和 Rad - N -投射模的一系列结论.

设 R 是环, M 是右 R -模. 称 N 是 M 的完全不变子模(记为 $N \triangleleft M$), 若对任意 $f \in \text{End}_R(M)$ 有 $f(N) \subseteq N^{[8]}$. 称 N 是 M 的小子模(记为 $N \ll M$), 若对 M 的任意真子模 L , 有 $N + L \neq M^{[9]}$. 称 R 是右遗传环^[10], 若 R 的每个理想作为右 R -模是投射的^[10]. 称 M 是小模, 若 $M \ll E(M)^{[10]}$. 称 N 是 M 的 δ -小子模(记为 $N \ll_\delta M$), 若 $N + L \neq M$, 其中 L 是 M 的真子模且 M/L 是奇异模^[11]. 设 \wp 是所有奇异单模构成的类. 称 $\delta(R)$ 是 \wp 在 R 中的拒绝, 若 $\delta(R) = \text{Re } j_R(\wp) = \bigcap \{L \leq R \mid R/L \in \wp\}^{[9]}$. 称 $T_R(M)$ 是 M 在 R 上的迹理想, 若 $T_R(M) = \sum \{\text{Im } f \mid f \in \text{Hom}(M, R)\}^{[9]}$. 称 M 是生成子, 若 $T_R(M) = R^{[9]}$. 称 R 是 GV -环, 若每个奇异单右 R -模是内射的^[10].

定义 1 设 M, N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 称 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 若对任意满同态 $f: N \rightarrow L$ 和任意同态 $h: M \rightarrow L$, 其中 L 是 N/F 的像(等价于 $F \subseteq \ker f$), 存在同态 $g: M \rightarrow N$ 使得 $h = fg$.

注 1 设 M, N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 当 $F = 0$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 N -投射模; 当 $F = \tau(N)$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 τ - N -投射模; 当 $F = \text{Rad}(N)$ 时, 相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模是 Rad - N -投射模; 当 $F = N$ 时, 任意右 R -模都是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

命题 1 设 M, N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 则下列条件等价:

- 1) M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模;
- 2) 如果 $f: N \rightarrow L$ 是满同态, 其中 L 是 N/F 的像, 那么 $f_*: \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, L)$ 是满同态, 其中 $f_*(\alpha) = f\alpha, \alpha \in \text{Hom}_R(M, N)$;
- 3) 每个同态 $\beta: M \rightarrow N/K$, 其中 $F \subseteq K \leq N$, 都可通过自然满同态 $v: N \rightarrow N/K$ 分解.

证明 1) \Rightarrow 2) 设 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模且 $f: N \rightarrow L$ 是满同态, 其中 L 是 N/F 的像. 因为 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以对任意同态 $g \in \text{Hom}_R(M, L)$ 都存在同态 $\alpha \in \text{Hom}_R(M, N)$ 使得 $f_* (\alpha) = f\alpha = g$, 故 f_* 是满同态.

2) \Rightarrow 1) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 1) 设 $g: N \rightarrow L$ 是满同态, 其中 $F \subseteq \ker g = K$. 因为 g, v 是满同态且 $\ker g = K = \ker v$, 所以由同态分解定理可知存在同构 $h: L \rightarrow N/K$ 使得 $v = hg$. 设 $\gamma: M \rightarrow L$ 是同态. 则由题设可知 $h\gamma$ 可通过自然满同态 $v: N \rightarrow N/K$ 分解, 即存在 $\bar{\gamma}: M \rightarrow N$ 使得 $h\gamma = v\bar{\gamma}$. 即图 1 可换.

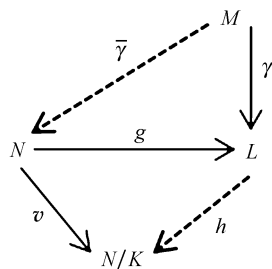


图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

于是 $hg\bar{\gamma} = v\bar{\gamma} = h\gamma$. 因为 h 是同构, 所以 $g\bar{\gamma} = \gamma$. 故 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

命题 2 设 M, N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 则以下几条成立.

- 1) 若 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, 则 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模当且仅当每个 $M_i (i \in I)$ 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.
- 2) 若 A, B 是右 R -模且 $A \cong B$, A 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模当且仅当 B 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.
- 3) 设 $K/F \triangleleft N/F$. 若 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 则 M 是相对于模 N/F 的完全不变子模 K/F 的 N/F -投射模.

证明 1) “ \Rightarrow ”考虑图 2.

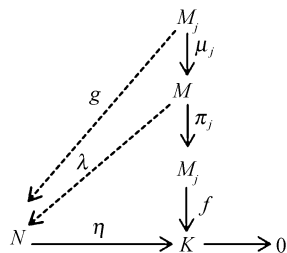


图 2 交换图

Fig. 2 Commutative diagram

其中 μ_j 是标准嵌入, π_j 是自然投影, $F \subseteq \ker \eta$. 因为 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以存在 $\lambda: M \rightarrow N$ 使得 $\eta\lambda = f\pi_j$. 因为 $\eta\lambda\mu_j = f\pi_j\mu_j = f$, 取 $g := \lambda\mu_j$, 所以 $\eta g = f$. 故 $M_j (j \in I)$ 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

“ \Leftarrow ”考虑图 3.

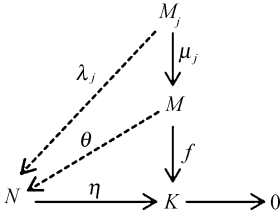


图 3 交换图

Fig. 3 Commutative diagram

其中 $F \subseteq \ker \eta$. 因为 M_j 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以存在同态 $\lambda_j: M_j \rightarrow N$ 使得 $\eta\lambda_j = f\mu_j$. 由直和的泛性质可知存在唯一同态 $\theta: M \rightarrow N$ 使得 $\theta\mu_j = \lambda_j$, 故 $\eta\theta\mu_j = \eta\lambda_j = f\mu_j$, 由 θ 的唯一性可知 $\eta\theta = f$. 因此 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

2) 考虑图 4.

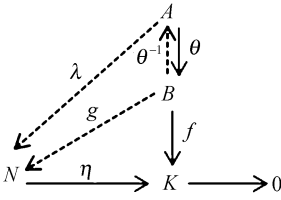


图 4 交换图

Fig. 4 Commutative diagram

其中 $F \subseteq \ker \eta$. 因为 A 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以存在 $\lambda: A \rightarrow N$ 使得 $\eta\lambda = f\theta$. 因为 $\eta\lambda\theta^{-1} = f\theta\theta^{-1} = f$, 取 $g := \lambda\theta^{-1}: B \rightarrow N$, 所以 $\eta g = f$. 因此 B 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模. 反之同理.

3) 假设 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, $K/F \triangleleft N/F$ 且 $K/F \subseteq H/F \leq N/F$. 考虑图 5.

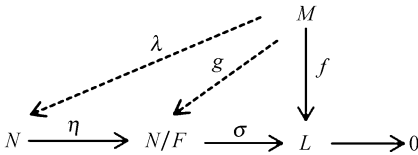


图 5 交换图

Fig. 5 Commutative diagram

其中 $\sigma: N/F \rightarrow L$ 是自然满同态, 其中 $L = ((N/F)/(K/F))/((H/F)/(K/F))$. 因为 η 是自然满同态, 所以 $F = \ker \eta \subseteq \ker \sigma\eta = H$. 因为 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以存在同态 $\lambda: M \rightarrow N$ 使得 $\sigma\eta\lambda = f$, 取 $g := \eta\lambda$, 则 $\sigma g = f$, 故 M 是相对于模 N/F 的完全不变子模 K/F 的 N/F -投射模.

命题 3 设 $N_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是右 R -模, $F_i \triangleleft N_i$, M 是相对于模 N_i 的完全不变子模 F_i 的 N_i -投射模. 若 $\bigoplus_{i=1}^n F_i \triangleleft \bigoplus_{i=1}^n N_i$, 则 M 是相对于模 $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ 的完全不变子模 $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ 的 $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ -投射模. 另外, 设 $N_i (i \in I)$ 是右 R -模, $F_i \triangleleft N_i$, M 是有限生成模且是相对于模 N_i 的完全不变子模 F_i 的 N_i -投射模 ($i \in I$). 若 $\bigoplus_{i \in I} F_i \triangleleft \bigoplus_{i \in I} N_i$, 则 M 是相对于模 $\bigoplus_{i \in I} N_i$ 的完全不变子模 $\bigoplus_{i \in I} F_i$ 的 $\bigoplus_{i \in I} N_i$ -投射模.

证明 只需证 $n=2$ 时结论成立. 当 $n=2$ 时, 设 $f: N_1 \oplus N_2 \rightarrow (N_1 \oplus N_2)/K$ 是自然满同态, 其中 $F_1 \oplus F_2 \subseteq K$. 考虑下列行列正合的交换图 6.

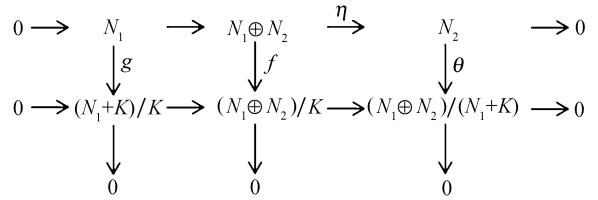


图 6 交换图

Fig. 6 Commutative diagram

其中 $\theta: N_2 \rightarrow (N_1 \oplus N_2)/(N_1 + K)$, $\theta(n_2) = n_2 + N_1 + K$, $n_2 \in N_2$, 显然 θ 是满同态. 用 $\text{Hom}(M, -)$ 作用图 6 可得图 7.

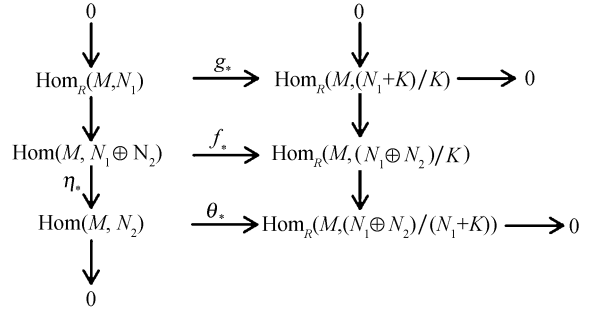


图 7 交换图

Fig. 7 Commutative diagram

其中 $g_*\alpha = g\alpha$, $\alpha \in \text{Hom}(M, N)$. 因为 $F_1 \subseteq N_1 \cap K = \ker g$, $F_2 \subseteq (N_1 + K) \cap N_2 = \ker \theta$ 且 M 是相对于模 N_i 的完全不变子模 F_i 的 N_i -投射模 ($i=1, 2$), 所以由命题 1 中 2) 可知 g_*, θ_* 是满同态. 因为 Hom 函子保持可裂正合性, 所以 η_* 是满同态, 从而 f_* 是满同态. 因此 M 是相对于模 $N_1 \oplus N_2$ 的完全不变子模 $F_1 \oplus F_2$ 的 $N_1 \oplus N_2$ -投射模.

最后, 考虑图 8.

其中 $\bigoplus_{i \in I} F_i \subseteq \ker g$. 因为 $\eta(M)$ 是有限生成模且 g 是满同态, 所以存在有限子集 $J \subseteq I$ 使得 $h := g|_{\bigoplus_{i \in J} N_i}: \bigoplus_{i \in J} N_i \rightarrow \eta(M)$ 是满同态. 考虑图 9.

因为 $F_i \triangleleft N_i$, M 是相对于模 N_i 的完全不变

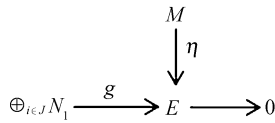


图 8 交换图
Fig. 8 Commutative diagram

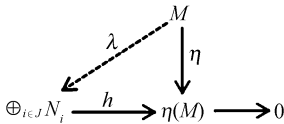


图 9 交换图
Fig. 9 Commutative diagram

子模 F_i 的 N_i -投射模($i \in J$)且 $\oplus_{i \in J} F_i \triangleleft \oplus_{i \in J} N_i$, 所以 M 是相对于模 $\oplus_{i \in J} N_i$ 的完全不变子模 $\oplus_{i \in J} F_i$ 的 $\oplus_{i \in J} N_i$ -投射模. 故存在同态 $\lambda: M \rightarrow \oplus_{i \in J} N_i \subseteq \oplus_{i \in I} N_i$ 使得 $h\lambda = g\lambda = \eta$. 因此 M 是相对于模 $\oplus_{i \in I} N_i$ 的完全不变子模 $\oplus_{i \in I} F_i$ 的 $\oplus_{i \in I} N_i$ -投射模.

推论 1^[9] 设 N_i ($i=1,2,\cdots,n$) 是右 R -模, M 是 N_i -投射模. 则 M 是 $\oplus_{i=1}^n N_i$ -投射模. 另外, 若 M 是有限生成模且是 N_i -投射模 ($i \in I$), 则 M 是 $\oplus_{i \in I} N_i$ -投射模.

推论 2^[2] 若 M 是 $\text{rad-}N_i$ -投射模 ($i=1,2,\cdots,n$), 则 M 是 $\text{rad-}\oplus_{i=1}^n N_i$ -投射模. 另外, 若 M 是有限生成模且是 $\text{rad-}N_i$ -投射模 ($i \in I$), 则 M 是 $\text{rad-}\oplus_{i \in I} N_i$ -投射模.

定理 1 设 N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 则下列条件等价:

- 1) 每个右 R -模是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模;
- 2) N 的每个同态像是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模;
- 3) $N = F \oplus A$, 其中 A 是半单模;
- 4) $N = F + \text{Soc}(N)$.

证明 1) \Rightarrow 2) 显然.
2) \Rightarrow 3) 因为 N/F 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以自然满同态 $f: N \rightarrow N/F$ 可裂, 从而 $F \leq^\oplus N$. 即存在 $A \leq N$ 使得 $N = F \oplus A$. 设 $K/F \triangleleft N/F$ 且 $K/F \subseteq H/F \leq N/F$. 因为 N/H 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模, 所以由命题 2 中 3) 可知 N/H 是相对于模 N/F 的完全不变子模 K/F 的 N/F -投射模. 故 N/H 是 N/F -投射模, 从而自然满同态 $g: N/F \rightarrow (N/F)/(H/F)$ 可裂, $H/F \leq^\oplus N/F$. 因此 N/F 是半单模. 因为 $N/F \cong A$, 所以 A 是半单模.

3) \Rightarrow 1) 考虑图 10.

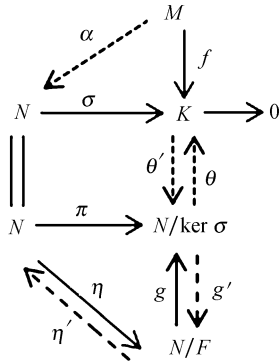


图 10 交换图
Fig. 10 Commutative diagram

其中 $F \subseteq \ker \sigma$, $\pi: N \rightarrow N/\ker \sigma$ 是自然满同态. 因为 σ, π 是满同态且 $\ker \pi = \ker \sigma$, 所以由同态分解定理可知存在同构 $\theta: N/\ker \sigma \rightarrow K$ 使得 $\sigma = \theta\pi$. 因为 $F \subseteq \ker \sigma$, 所以可定义满同态 $g: N/F \rightarrow N/\ker \sigma$, $g(n+F) = n + \ker \sigma$ 使得 $\pi = g\eta$, 其中 $\eta: N \rightarrow N/F$ 是自然满同态. 由 N/F 是半单模可知满同态 g 可裂, 即存在同态 $g': N/\ker \sigma \rightarrow N/F$ 使得 $gg' = 1_{N/\ker \sigma}$. 由假设可知 $F \leq^\oplus N$, 故自然满同态 η 可裂, 即存在同态 $\eta': N/F \rightarrow N$ 使得 $\eta\eta' = 1_{N/F}$. 因此 $\theta\pi\eta'g'\theta^{-1}f = \theta g\eta\eta'g'\theta^{-1}f = f$. 取 $\alpha := \eta'g'\theta^{-1}f$, $\theta\pi\alpha = \sigma\alpha = f$, 进而 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

3) \Rightarrow 4) 因为 $N = F \oplus A$, 其中 A 是半单模, 所以 $N = F \oplus \text{Soc}(A)$, 从而 $N = N + \text{Soc}(N) = F \oplus \text{Soc}(A) + \text{Soc}(N) = F + \text{Soc}(N)$. 因此 $N = F + \text{Soc}(N)$.

4) \Rightarrow 3) 假设 $N = F + \text{Soc}(N)$. 当 $F \cap \text{Soc}(N) = 0$ 时, 结论显然成立. 当 $F \cap \text{Soc}(N) = B \neq 0$ 时, $B \leq^\oplus \text{Soc}(N)$, 故 $N = F + \text{Soc}(N) = F + (A \oplus B) = F + A$, 其中 A 是 N 的半单子模. 由 $(F \cap A) \cap \text{Soc}(A) \subseteq (F \cap \text{Soc}(N)) \cap \text{Soc}(A) = B \cap A = 0$ 可知 $F \cap A = 0$. 因此 $N = F \oplus A$, 其中 A 是半单模.

推论 3^[9] 设 N 是右 R -模. 则下列条件等价:

- 1) 每个右 R -模是 N -投射模;
- 2) N 的每个同态像是 N -投射模;
- 3) N 是半单模.

证明 在定理 1 中取 $F=0$ 即可.

引理 1^[12] 设 M 是右 R -模, $N \leq M$. 则下列两条等价:

- 1) $N \ll_\delta M$.
- 2) 若 $A \leq M$, $M = A + N$, 则 $M = A \oplus B$, 其中 B 是 N 的投射半单子模.

定理 2 设 N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 若 F 是半单模或 $F \ll_{\delta} N$, 则下列条件等价:

- 1) 每个右 R -模是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模;
- 2) N 的每个同态像是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模;
- 3) N 是半单模.

证明 当 F 是半单模时, 由定理 1 即证. 下设 $F \ll_{\delta} N$.

- 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2) 显然.
- 2) \Rightarrow 3) 由定理 1 可知 $N = F \oplus A$, 其中 A 是半单模. 因为 $F \ll_{\delta} N$, 所以由引理 1 可知 $N = B \oplus A$, 其中 B 是 F 的投射半单子模, 故 N 是半单模.

推论 4^[2] 设 N 是有限生成右 R -模. 则下列条件等价:

- 1) 每个右 R -模是 $\text{Rad-}N$ -投射模;
- 2) N 的每个同态像是 $\text{Rad-}N$ -投射模;
- 3) N 是半单模.

证明 若 N 是有限生成右 R -模, 则 $\text{Rad}(N) \ll_{\delta} N$

故由定理 2 即可证得.

推论 5^[1] 设 N 是右 R -模. 则下列条件等价:

- 1) 每个右 R -模是 $\text{Soc-}N$ -投射模;
- 2) N 的每个同态像是 $\text{Soc-}N$ -投射模;
- 3) N 是半单模.

证明 因为 $\text{Soc}(N)$ 是 N 的半单子模, 所以由定理 2 即可证得.

推论 6 设 R 是环. 则下列条件等价:

- 1) R 是半单环;
- 2) 每个右 R -模是 R_R -投射模;
- 3) 每个右 R -模是 Rad- 投射模;
- 4) 每个右 R -模是 Soc- 投射模.

定理 3 设 R 是环, M 是右 R -模, $F \triangleleft E(M)$. 则下列条件等价:

- 1) 相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模的子模是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模;
- 2) 投射右 R -模的子模是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模;
- 3) R 的右理想是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模;
- 4) $E(M)/F$ 的商模是内射模.

证明 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) 显然.
3) \Rightarrow 4) 设 I 是 R 的右理想, K 是 $E(M)/F$ 的同态像. 考虑图 11.

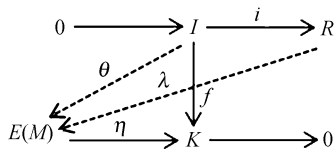


图 11 交换图
Fig. 11 Commutative diagram

由假设可知 I 是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模, 故存在同态 $\theta: I \rightarrow E(M)$ 使得 $\eta\theta = f$. 因为 $E(M)$ 是内射模, 所以存在同态 $\lambda: R \rightarrow E(M)$ 使得 $\lambda i = \theta$, 故 $\eta\lambda i = \eta\theta = f$. 设 $g := \eta\lambda: R \rightarrow K$, 则 g 是 f 的扩张. 故由 Bear 准则可知 K 是内射模.

4) \Rightarrow 1) 设 B 是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模, $A \leq B$. 考虑图 12.

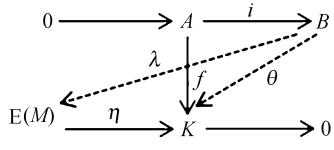


图 12 交换图
Fig. 12 Commutative diagram

其中 K 是 $E(M)/F$ 的同态像. 因为 K 是内射模, 所以 f 可以扩张到同态 $\theta: B \rightarrow K$ 使得 $f = \theta i$. 因为 B 是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模, 所以存在同态 $\lambda: B \rightarrow E(M)$ 使得 $\eta\lambda = \theta$. 由 $\eta\lambda i(x) = \eta\lambda(x) = \theta(x) = f(x)$, $x \in A$ 可知同态 $\lambda i: A \rightarrow E(M)$ 是 f 的提升, 故 A 是相对于模 $E(M)$ 的完全不变子模 F 的 $E(M)$ -投射模.

推论 7 设 M 是右 R -模. 则下列条件等价:

- 1) $E(M)$ -投射模的子模是 $E(M)$ -投射模;
- 2) 投射右 R -模的子模是 $E(M)$ -投射模;
- 3) R 的右理想 $E(M)$ -投射模;
- 4) $E(M)$ 的商模是内射模.

证明 在定理 3 中取 $F = 0$ 即可.

推论 8 设 M 是内射右 R -模, $F \triangleleft M$. 则下列条件等价:

- 1) 相对于模 M 的完全不变子模 F 的 M -投射模的子模是相对于模 M 的完全不变子模 F 的 M -投射模;
- 2) 投射右 R -模的子模是相对于模 M 的完全不变子模 F 的 M -投射模;
- 3) R 的右理想是相对于模 M 的完全不变子模 F 的 M -投射模;
- 4) M/F 的商模是内射模.

证明 若 M 是内射右 R -模, 则 $M = E(M)$, 故

由定理 3 即可证得.

推论 9 设 R 是环, M 是内射右 R -模. 则下列条件等价:

- 1) R 是右遗传环;
- 2) M -投射模的子模是 M -投射模;
- 3) 投射右 R -模的子模是 M -投射模;
- 4) R 的右理想是 M -投射模.

证明 在推论 8 中取 $F=0$ 即可证得.

命题 4 设 M 和 N 是右 R -模, $F \triangleleft N$. 若 N/F 是半单模, 则下列两条等价:

- 1) M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.
- 2) 每个同态 $\gamma: M \rightarrow N/F$ 可以被提升到同态 $\lambda: M \rightarrow N$ 使得 $\gamma = \eta\lambda$, 其中 $\eta: N \rightarrow N/F$ 是自然满同态.

证明 1) \Rightarrow 2) 显然.

2) \Rightarrow 1) 考虑图 13.

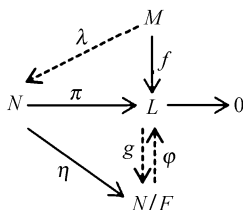


图 13 交换图

Fig. 13 Commutative diagram

其中 $F \subseteq \ker \pi$. 因为 η, π 是满同态且 $F = \ker \eta \subseteq \ker \pi$, 所以由同态分解定理可知存在满同态 $\varphi: N/F \rightarrow L$ 使得 $\pi = \varphi\eta$. 因为 N/F 是半单模所以满同态 φ 可裂, 即存在同态 $g: L \rightarrow N/F$ 使得 $\varphi g = 1_L$. 由假设可知存在同态 $\lambda: M \rightarrow N$ 使得 $\eta\lambda = g f$. 因此 $\pi\lambda = \varphi\eta\lambda = \varphi g f = 1_L f = f$, 故 λ 为所求同态, 即 M 是相对于模 N 的完全不变子模 F 的 N -投射模.

命题 5 设 N_1, N_2 是右 R -模, $F_1 \oplus F_2 \triangleleft N_1 \oplus N_2$, 其中 $F_1 \leq N_1, F_2 \leq N_2$. 若 $N_1 \oplus N_2$ 是相对于模 $N_1 \oplus N_2$ 的完全不变子模 $F_1 \oplus F_2$ 的 $N_1 \oplus N_2$ -投射模, 则每个满同态 $f: N_1 \rightarrow N_2$ 可裂, 其中 $F_1 \subseteq \ker f$. 另外, 若 N_1 是投射模, 则 N_2 是投射模.

证明 设 $f: N_1 \rightarrow N_2$ 是满同态且 $F_1 \subseteq \ker f$. 考虑图 14.

其中 π_1, π_2 是自然投影. 令 $g := f\pi_1$, 因为 $g(F_1 \oplus F_2) = f(F_1) = 0$, 所以 $F_1 \oplus F_2 \subseteq \ker g$. 因为 $N_1 \oplus N_2$ 是相对于模 $N_1 \oplus N_2$ 的完全不变子模 $F_1 \oplus F_2$ 的 $N_1 \oplus N_2$ -投射模, 所以存在同态 $\lambda: N_1 \oplus$

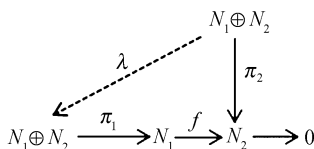


图 14 交换图

Fig. 14 Commutative diagram

$N_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2$ 使得 $g\lambda = \pi_2$. 设 $\eta: N_2 \rightarrow N_1 \oplus N_2$ 是标准嵌入, 定义同态 $\theta: N_2 \rightarrow N_1, \theta(n) = \pi_1\lambda\eta(n) = \pi_1\lambda(n), n \in N_2$, 则 $f\theta(n) = f\pi_1\lambda(n) = g\lambda(n) = \pi_2(n) = n$, 即 $f\theta = 1_{N_2}$, 故满同态 $f: N_1 \rightarrow N_2$ 可裂, 从而存在可裂短正合列 $0 \rightarrow \ker f \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$ 使得 $N_1 \cong \ker f \oplus N_2$. 因此, 若 N_1 是投射模, 则 N_2 是投射模.

定义 2 设 M 是右 R -模, $I \triangleleft R_R$. 称 M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 若 M 是相对于模 R_R 的完全不变子模 I 的 R_R -投射模.

注 2 设 R 是环, $I \triangleleft R_R$. 当 $I=0$ 时, 相对于理想 I 的 R -投射模是 R -投射模; 当 $I=\tau(R)$ 时, 相对于理想 I 的 R -投射模是 τ -投射模; 当 $I=\text{Rad}(R)$ 时, 相对于理想 I 的 R -投射模是 Rad -投射模; 当 $I=R$ 时, 每个右 R -模都是相对于理想 I 的 R -投射模.

命题 6 设 M 是右 R -模, $I \triangleleft R_R$. 若 $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$, 其中 $I \subseteq K \leq R$, 则 M 是相对于理想 I 的 R -投射模. 当 R 是右自内射环时, 反之成立.

证明 用 $\text{Hom}_R(M, -)$ 作用在短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow R \rightarrow R/K \rightarrow 0$ 上, 其中 $I \subseteq K \leq R$, 可得长正合列: $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, K) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R/K) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, K) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, R/K) \rightarrow \dots$. 如果 $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$, 则 $f_*: \text{Hom}_R(M, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R/K)$ 是满同态, 进而由命题 1 中 2) 可知 M 是相对于理想 I 的 R -投射模. 反之, 若 R 是右自内射环, 则 $\text{Ext}_R^1(M, R_R) = 0$. 因为 M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 所以 f_* 是满同态. 因此 $\text{Ext}_R^1(M, K) = 0$.

定理 4 设 R 是环, $I \triangleleft R_R$. 若 $I \ll_e R_R$, 则 R 是半单环当且仅当 R/I 是半单的且是相对于理想 I 的 R -投射模.

证明 “ \Rightarrow ” 因为 R 是半单环, 所以 R/I 是半单的且每个右 R -模是投射的, 故 R/I 是相对于理想 I 的 R -投射模.

“ \Leftarrow ” 因为 R/I 是相对于理想 I 的 R -投射模, 所以满同态 $R \rightarrow R/I$ 可裂, 从而 $I \leq^{\oplus} R$, 即存在 R 的右理想 T 使得 $R = I \oplus T$, 故 $R/I \cong T$, 进而由

R/I 是半单的可知 T 是半单模. 因为 $I \ll_{\phi} R_R$, 所以由引理 1 可知 $R=Y \oplus T$, 其中 Y 是 I 的半单投射右理想. 因此 R 是半单环.

命题 7 设 R 是环, M 是右 R -模, $I \triangleleft R_R$. 若 $I \subseteq \delta(R)$ 且 M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 则下列条件等价:

- 1) M 是生成子;
- 2) M 生成每个单右 R -模;
- 3) 对任意单右 R -模 S , $\text{Hom}(M, S) \neq 0$.

证明 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 1) 假设 $T_R(M) \neq R$, 故 $T_R(M) \subseteq A$, 其中 A 是 R 的极大理想. 因为 R/A 是单模, 所以由前提条件可知存在非零同态 $f: M \rightarrow R/A$. 考虑图 15.

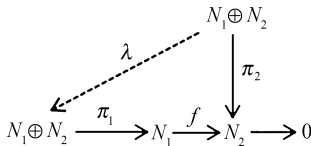


图 15 交换图

Fig. 15 Commutative diagram

其中 $\eta: R \rightarrow R/A$ 是自然满同态. 若 R/A 是奇异模, 则 $\eta(I) \subseteq \eta(\delta(R)) \subseteq \delta(R/A) = 0$, 故 $I \subseteq \ker \eta$. 由 M 是相对于理想 I 的 R -投射模可知存在同态 $\lambda: M \rightarrow R$ 使得图 15 可换. 若 R/A 是投射模, 则满同态 η 可裂, 存在同态 $\lambda: M \rightarrow R$ 使得图 15 可换. 故上述两种情况都存在同态 λ 使得 $\eta\lambda = f$. 由 $\text{Im } \lambda \subseteq T_R(M) \subseteq A = \ker \eta$ 可知 $f = \eta\lambda = 0$, 矛盾. 因此 $T_R(M) = R$, M 是生成子.

定理 5 设 R 是环, $I \triangleleft R_R$. 若 $I \subseteq \delta(R)$, 则下列条件等价:

- 1) R 是 GV-环;
- 2) 每个右 R -模的小子模是投射模;
- 3) 每个右 R -模的小子模是相对于理想 I 的 R -投射模;
- 4) 每个小右 R -模是相对于理想 I 的 R -投射模.

证明 1) \Rightarrow 2) 设 M 是右 R -模, $K \ll M$. 当 $K = 0$ 时, 显然成立. 当 $0 \neq x \in K$ 时, 令 A 是 xR 的极大子模. 若 xR/A 是奇异模, 则由假设可知 xR/A 是内射模, 故 $xR/A \leq^{\oplus} M/A$. 因为 $A \leq xR \leq K \ll M$, 所以 $A \leq xR \ll M$, 故 $xR/A \ll M/A$, 从而 $xR/A = 0$, 矛盾. 因此 xR/A 不是奇异模, 而是投射模, 故 $A \leq^{\oplus} xR$, 从而 xR 和 K 是半单模. 令 $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$, 其中 K_i 是 K 的单子模. 若 K_i 是奇异模, 则由假设可知 K_i 是内射模, 故 $K_i \leq^{\oplus} M$. 因为 $K_i \leq K \ll M$, 以 $K_i \ll M$, 故 $K_i = 0$, 矛盾. 因此 K_i 不是奇异模,

而是投射模, 故 K 是投射模.

2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) 显然.

4) \Rightarrow 1) 设 M 是奇异单右 R -模. 若 $M \ll E(M)$, 则由假设可知 M 是相对于理想 I 的 R -投射模. 考虑图 16.

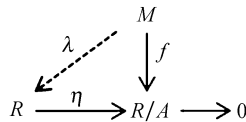


图 16 交换图

Fig. 16 Commutative diagram

对任意 $g: R \rightarrow M$ 的满同态有 $g(I) \subseteq g(\delta(R)) \subseteq \delta(M) = 0$ 可知 $I \subseteq \ker g$. 因为 M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 所以存在同态 $h: M \rightarrow R$ 使得 $gh = id$, 故满同态 g 可裂, 从而 M 是投射模, 矛盾. 因此 M 不是 $E(M)$ 的小子模, 故存在 $E(M)$ 的真子模 K 使得 $E(M) = K + M$. 因为 $K \cap M = 0$, 所以 $M \leq^{\oplus} E(M)$. 因此 M 是内射模.

推论 10^[2] 设 R 是环. 则下列条件等价:

- 1) R 是 GV-环;
- 2) 每个右 R -模的小子模是投射模;
- 3) 每个右 R -模的小子模是 Rad-投射模;
- 4) 每个小右 R -模是 Rad-投射模.

证明 因为 $\text{Rad}(R) \subseteq \delta(R)$, 所以由定理 5 即可证得.

命题 8 设 R 是环, M 是右 R -模, $I \triangleleft R_R, \bar{I} \triangleleft \bar{R} = R/I$. 若 $\text{Rad}(\bar{R}) = 0$ 且 M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 则 $(M/\text{Rad}(M))_{\bar{R}}$ 是相对于理想 \bar{I} 的 \bar{R} -投射模.

证明 设 M 是相对于理想 I 的 R -投射模. 对同态 $\eta: \bar{R} \rightarrow L$, 其中 $\bar{I} \subseteq \ker \eta$, 考虑图 17.

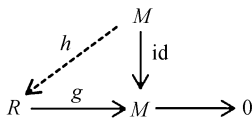


图 17 交换图

Fig. 17 Commutative diagram

M 是相对于理想 I 的 R -投射模, 所以由命题 2 中 3) 可知 M 是相对于理想 \bar{I} 的 \bar{R} -投射模, 故存在同态 $g: M \rightarrow \bar{R}$ 使 $f\pi = \eta g$, 其中 $\pi: M \rightarrow M/\text{Rad}(M)$ 是自然满同态. 因为 $g(\text{Rad}(M)) \subseteq \text{Rad}(\bar{R}) = 0$, 所以 $\ker \pi = \text{Rad}(M) \subseteq \ker g$, 故由同态分解定理可知存在同态 $h: M/\text{Rad}(M) \rightarrow \bar{R}$ 使得 $g = h\pi$. 因为

$\eta h\pi = \eta g = f\pi$ 且 π 是满同态, 所以 $\eta h = f$. 因此 $(M/\text{Rad}(M))_{\bar{R}}$ 是相对于理想 \bar{I} 的 \bar{R} -投射模.

命题 9 设 R 是环, $I \triangleleft R_R$. 若 $I \subseteq \delta(R)$, 则每个单相对于理想 I 的 R -投射模是投射的.

证明 设 S 是单相对于理想 I 的 R -投射模. 若 S 是奇异模, $\eta: R \rightarrow S$ 是自然满同态, 则 $\eta(I) \subseteq \eta(\delta(R)) \subseteq \delta(S) = 0$, 即 $I \subseteq \ker \eta$. 因为 S 是相对于理想 I 的 R -投射模, 所以满同态 η 可裂, 故 S 是投射模, 矛盾. 因此 S 不是奇异模而是投射模.

参考文献:

[1] JIN Y K, CHAN H, YANG L. Proceedings of the sixth China-Japan-Korea international conference on ring theory [C]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2012: 209-235.

[2] AMIN I, IBRAHIM Y, YOUSIF M. Rad-projective and strongly rad-projective modules [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(6): 2174-2192.

[3] 李 霞. 小 R -投射模与 Γ -拟投射模 [D]. 兰州: 兰州理工大学, 2020.

[4] ALHILALI H, IBRAHIM Y, PUNINSKI G. When R is a testing modules for projectivity [J]. Journal of Algebra, 2017, 484: 198-206.

[5] ALAGOZ Y, BUYUKASIK E. Max-projective modules [J]. Journal of Algebra and Its Application, 2020, 19(3): 2150095.

[6] TAYYAH A S, MEHDI A R. SS-injective modules and rings [J]. Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics, 2017, 9(2): 57-70.

[7] ZEYADA N. S-injective modules and rings [J]. Advances in Pure Mathematics, 2014, 4: 25-33.

[8] ÖZCAN A C, HARMANCI A. Duo modules [J]. Glasgow Mathematical Journal, 2006, 48(3): 533-545.

[9] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and categories of modules [M]. 2nd ed. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006.

[10] LAM T Y. Lectures on modules and rings [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[11] ZHOU Y Q. Generalizations of perfect, semiperfect, and semi-regular rings [J]. Algebra Colloquium, 2000, 7(3): 305-318.

[12] 王永铎, 王亚婷. D_4 - δ -盖及其应用 [J]. 兰州理工大学学报, 2020, 46(4): 154-156.