第 49 卷 第 5 期 兰州理工大学学报 Vol. 49 No. 5
2023 年 10 月 Journal of Lanzhou University of Technology Oct. 2023

文章编号：1673-5196(2023)05-0167-06

三角矩阵环上投射余可解的 Gorenstein AC-平坦模

秦军霞，张翠萍*

（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：引入投射余可解的 Gorenstein AC-平坦模的概念（简记为 PGACF-模），给出这类模的等价条件. 设 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 是三角矩阵环，其中 A，B 是环，U 是 (B,A)-双模. 在一定条件下，证明了如果 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGACF 左 T-模，那么 M_1 是 PGACF 左 A-模，$\mathrm{Coker}(\varphi^M)$ 是 PGACF 左 B-模，且 φ^M 是单同态；若 PGACF-模的类对扩张封闭，则上述结论反过来也成立.

关键词：投射余可解的 Gorenstein AC-平坦模；三角矩阵环；absolutely clean 模

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A

Projectively coresolved Gorenstein AC-flat modules over triangular matrix rings

QIN Jun-xia, ZHANG Cui-ping

(School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The concept of projectively coresolved Gorenstein AC-flat modules is introduced (PGACF-modules for short), and the equivalent condition of these modules is given. Let $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ be a triangular matrix ring, where A and B are rings, and U is a (B,A)-bimodule. Under some conditions, it is demonstrated $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ is a PGACF left T-module, then M_1 is a PGACF left A-module, $\mathrm{Coker}(\varphi^M)$ is a PGACF left B-module and the morphism φ^M is a monomorphism; if the class of PGACF-modules is closed under extensions, the opposite case holds.

Key words: projectively coresolved Gorenstein AC-flat modules; triangular matrix rings; absolutely clean modules

在代数的同调理论和环论中，三角矩阵环起着非常重要的作用，它使得代数上的模理论变得更加丰富，也使得对模的研究更加具体. 近年来，三角矩阵环上的模受到许多学者的青睐. Fossum 等[1]研究了三角矩阵环 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 上的平坦模，证明了 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是平坦左 $\boldsymbol{T}$-模当且仅当 M_1 是平坦左 A-模，$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$ 是平坦左 B-模，且 φ^M 是单同态. Haghany 和 Varadarajan[2]讨论了三角矩阵环 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 上的投射模，证明了 $W=(W_1,W_2)_{\varphi_W}$ 是投射右 $\boldsymbol{T}$-模当且仅当 $W_1/\mathrm{Im}(\varphi_W)$ 是投射右 A-模，W_2 是投射右 B-模，且 φ_W 是单同态. Bravo 等[3]引入了 absolutely clean 模并研究了其性质. Bravo 等[4]引入了 Gorenstein AC-平坦模，给出了这类模的一些等价条件. Šaroch 等[5]引入了投射余可解的 Gorenstein 平坦模（简记为 PGF-模），证明了这类模是投射可解的. 同年 Iacob[6]给出了 PGF-模与 Ding 投射模，Gorenstein 平坦模之间的关系，证明了 PGF-模既是 Ding 投射模又是 Gorenstein 平坦模.

收稿日期：2022-06-13
基金项目：国家自然科学基金(11761060)
通讯作者：张翠萍(1974-)，女，甘肃武威人，博士，副教授.
Email: zhangcp@nwnu.edu.cn

设 A，B 是环，U 是 (B,A)-双模，则 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 关于矩阵的加法和乘法构成了环. Zhang[7] 研究了 $\boldsymbol{T}$ 上的 Gorenstein 投射模的结构，证明了 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 Gorenstein 投射左 $\boldsymbol{T}$-模当且仅当 M_1 是 Gorenstein 投射左 A-模，$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$ 是 Gorenstein 投射左 B-模，并且 φ^M 是单同态. 狄振兴等[8]研究了 $\boldsymbol{T}$ 上的 absolutely clean 模和 Gorenstein AC-平坦模，证明了在一定条件下，$M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 Gorenstein AC-平坦左 $\boldsymbol{T}$-模当且仅当 M_1 是 Gorenstein AC-平坦左 A-模，$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$ 是 Gorenstein AC-平坦左 B-模，且 φ^M 是单同态.

受以上工作的启发，本文引入 PGACF-模，研究在 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 上的 PGACF-模与 A 上的 PGACF-模和 B 上的 PGACF-模之间的关系.

1 预备知识

本文所涉及的环均指有单位元的结合环，模均指酉模. 下面给出本文用到的一些概念和事实.

定义 1[3] 称左 R-模 M 是 FP_∞ 型的，如果存在左 R-模的正合列

$$\cdots\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$$

其中 $P_i(i\geqslant 0)$ 是有限生成投射模.

定义 2[3] 称左 R-模 N 是 absolutely clean 模，如果对任意 FP_∞ 型左 R-模 M，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0$.

设 G 是右 R-模，G 的 absolutely clean 维数定义为 $\text{AC-}d_R(G)=\inf\{n\in\mathbf{Z}\mid$ 存在右 R-模的正合列

$$0\to G\to L_0\to\cdots\to L_{n-1}\to L_n\to 0$$

其中 $L_i\,(0\leqslant i\leqslant n)$ 是 absolutely clean 模$\}$，若这样的 n 不存在，则记 $\text{AC-}d_R(G)=\infty$. 记

$$r\text{AC-}d(R)=\sup\{\text{AC-}d_R(G)\mid G\text{ 是右 }R\text{-模}\}$$

定义 3[4] 称左 R-模 M 是 Gorenstein AC-平坦模，如果存在平坦左 R-模的正合列

$$F:\cdots\to F_1\to F_0\to F_{-1}\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F_0\to F_{-1})$，并且对任意 absolutely clean 右 R-模 L，$L\underset{R}{\otimes}F$ 是正合列.

设 A，B 是环，U 是 (B,A)-双模. 设

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ u & b\end{pmatrix}\,\middle|\, a\in A,b\in B,u\in U\right\}$$

其乘法定义为

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ u & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & 0\\ u' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa' & 0\\ ua'+bu' & bb'\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}a & 0\\ u & b\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a' & 0\\ u' & b'\end{pmatrix}\in\boldsymbol{T}$，则 $\boldsymbol{T}$ 关于矩阵的加法和乘法构成环.

左 $\boldsymbol{T}$-模范畴中的对象可以用三元组 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 来表示，其中 M_1 是左 A-模，M_2 是左 B-模，$\varphi^M: U\underset{A}{\otimes}M_1\to M_2$ 是左 B-模同态. 任意的两个左 $\boldsymbol{T}$-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 和 $N=\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}_{\varphi^N}$ 之间的态射为 $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$，其中 $f_1: M_1\to N_1$ 是左 A-模同态，$f_2: M_2\to N_2$ 是左 B-模同态，并且满足如下交换图，如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd}
U\underset{A}{\otimes}M_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\underset{A}{\otimes}N_1 \arrow[d, "\varphi^N"] \\
M_2 \arrow[r, "f_2"] & N_2
\end{tikzcd}$$

图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

给定左 $\boldsymbol{T}$-模 $M=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$，有

$$\widetilde{\varphi^M}: M_1\to\mathrm{Hom}_B(U,M_2)$$

其中 $\widetilde{\varphi^M}(x)(u)=\varphi^M(u\otimes x)$，$x\in M_1$，$u\in U$.

类似地，右 $\boldsymbol{T}$-模范畴中的对象可以用三元组 $(N_1,N_2)_{\psi_N}$ 来表示，其中 N_1 是右 A-模，N_2 是右 B-模，$\psi_N: N_2\underset{B}{\otimes}U\to N_1$ 是右 A-模同态. 任意的两个右 $\boldsymbol{T}$-模 $(M_1,M_2)_{\psi_M}$ 和 $(N_1,N_2)_{\psi_N}$ 之间的态射为 (g_1,g_2)，其中 $g_1: M_1\to N_1$ 是右 A-模同态，$g_2: M_2\to N_2$ 是右 B-模同态，并且满足如下交换图，如图 2 所示.

$$\begin{tikzcd}
M_2\underset{B}{\otimes}U \arrow[r, "g_2\otimes 1"] \arrow[d, "\psi_M"'] & N_2\underset{B}{\otimes}U \arrow[d, "\psi_N"] \\
M_1 \arrow[r, "g_1"] & N_1
\end{tikzcd}$$

图 2 交换图

Fig. 2 Commutative diagram

左 $\boldsymbol{T}$-模序列

$$0\to\begin{pmatrix}M_1'\\ M_2'\end{pmatrix}_{\varphi^{M'}}\to\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}\to\begin{pmatrix}M_1''\\ M_2''\end{pmatrix}_{\varphi^{M''}}\to 0$$

正合当且仅当 $0\to M_1'\to M_1\to M_1''\to 0$ 和 $0\to M_2'\to M_2\to M_2''\to 0$ 正合. 关于该环的细节参见文献[2].

设 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $\boldsymbol{T}$-模，$N=(N_1,N_2)_{\psi_N}$ 是右 $\boldsymbol{T}$-模. 由文献[9]中命题 3.6.1 得同构式

$$N\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}M\cong(N_1\underset{A}{\otimes}M_1\oplus N_2\underset{B}{\otimes}M_2)/H$$

其中子群

$$H=\{\psi_N(x_2\otimes u)\otimes y_1-x_2\otimes\varphi^M(u\otimes y_1)\mid x_2\in N_2,y_1\in M_1,u\in U\}$$

引理 1[2]　设 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $\boldsymbol{T}$-模，则 M 是投射左 $\boldsymbol{T}$-模当且仅当 M_1 是投射左 A-模，$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$是投射左 B-模，且 φ^M 是单同态.

引理 2[8]　设 U_A 是有限生成投射模，${}_BU$ 是平坦模，$L=(L_1,L_2)_{\varphi_L}$ 是右 $\boldsymbol{T}$-模.

1) 如果 L 是 absolutely clean 右 $\boldsymbol{T}$-模，那么 L_1 是 absolutely clean 右 A-模且 L_2 是 absolutely clean 右 B-模.

2) 如果 L_1 是 absolutely clean 右 A-模，$\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi_L}$ 是 absolutely clean 右 B-模，且 $\overline{\varphi_L}$ 是满同态，那么 L 是 absolutely clean 右 $\boldsymbol{T}$-模.

引理 3　设 U_A 是有限生成投射模，${}_BU$ 是平坦模，M_2 是右 B-模. 如果 $\mathrm{AC}\text{-}d_B(M_2)<\infty$，那么 $\mathrm{AC}\text{-}d_{\boldsymbol{T}}(0,M_2)<\infty$.

2　主要结果

定义 4　称左 R-模 M 是投射余可解的 Gorenstein AC-平坦模，如果存在投射左 R-模的正合列

$$P:\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，并且对任意的 absolutely clean 右 R-模 L，$L\underset{R}{\otimes}P$ 是正合列(将 M 简记为 PGACF-模).

显然 PGACF-模是 Gorenstein AC-平坦模. 以下讨论环 $\boldsymbol{T}$ 上的 PGACF-模与环 A 上的 PGACF-模和环 B 上的 PGACF-模之间的关系.

引理 4　设 M 是左 R-模，则下列条件等价：

1) M 是 PGACF-模；

2) 存在左 R-模的正合列

$$P:\cdots P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$$

其中 $P^i\,(i\in\mathbf{Z})$是投射模，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，并且对 $\mathrm{AC}\text{-}d_R(G)<\infty$的右 R-模 G，$G\underset{R}{\otimes}P$ 正合.

证明　2)⇒1) 显然.

1)⇒2) 因为 M 是 PGACF-模，所以存在投射左 R-模的正合列

$$P:\cdots\to P^{-1}\to P^0\to P^1\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$，并且对任意的 absolutely clean 右 R-模 L，序列 $L\underset{R}{\otimes}P$ 正合. 若 $\mathrm{AC}\text{-}d_R(G)=n<\infty$，则存在 absolutely clean 右 R-模的正合列

$$0\to G\to G_0\to\cdots\to G_{n-1}\to G_n\to 0$$

其中 $G_i\,(0\leqslant i\leqslant n)$是 absolutely clean 模. 由于 $P_i\,(i\in\mathbf{Z})$是投射左 R-模，所以

$$0\to G\underset{R}{\otimes}P\to G_0\underset{R}{\otimes}P\to\cdots\to G_{n-1}\underset{R}{\otimes}P\to G_n\underset{R}{\otimes}P\to 0$$

是复形的正合列，其中复形 $G_i\underset{R}{\otimes}P\,(0\leqslant i\leqslant n)$正合，因此复形 $G\underset{R}{\otimes}P$ 正合.

命题 1　设 U_A 是有限生成投射模，${}_BU$ 是平坦模，$M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $\boldsymbol{T}$-模.

1) 如果 M_1 是 PGACF 左 A-模，那么 $\begin{pmatrix}M_1\\U\underset{A}{\otimes}M_1\end{pmatrix}$是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模.

2) 如果 M_2 是 PGACF 左 B-模，那么$\begin{pmatrix}0\\M_2\end{pmatrix}$是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模.

证明　1) 因为 M_1 是 PGACF 左 A-模，所以存在投射左 A-模的正合列

$$P_1:\cdots\to P_1^{-1}\xrightarrow{d_1^{-1}}P_1^0\xrightarrow{d_1^0}P_1^1\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(d_1^0)$，并且对任意的 absolutely clean 右 A-模 E，序列 $E\underset{A}{\otimes}P_1$ 正合. 由 U_A 是有限生成投射模知序列 $U\underset{A}{\otimes}P_1$ 正合，因此由引理 1 知，存在投射左 $\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$\begin{pmatrix}P_1\\U\underset{A}{\otimes}P_1\end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix}P_1^{-1}\\U\underset{A}{\otimes}P_1^{-1}\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}d_1^{-1}\\1\otimes d_1^{-1}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^0\\U\underset{A}{\otimes}P_1^0\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}d_1^0\\1\otimes d_1^0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}P_1^1\\U\underset{A}{\otimes}P_1^1\end{pmatrix}\to\cdots$$

使得$\begin{pmatrix}M_1\\U\underset{A}{\otimes}M_1\end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}d_1^0\\1\otimes d_1^0\end{pmatrix}$. 对任意的 absolutely clean 右 $\boldsymbol{T}$-模$(L_1,L_2)_{\varphi_L}$，存在右 $\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$0\to(L_1,0)\to(L_1,L_2)\to(0,L_2)\to 0$$

因为$\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}$($i\in\mathbf{Z}$)是投射左$\boldsymbol{T}$-模,所以有正合序列

$$0\to(L_1,0)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\to$$
$$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\to$$
$$(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\to 0$$

由文献[9]中的命题3.6.1知:

$$(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\cong$$
$$(L_2\underset{B}{\otimes}U\underset{A}{\otimes}P_1^i)/(L_2\underset{B}{\otimes}U\underset{A}{\otimes}P_1^i)=0$$

因此对任意整数i,有

$$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\cong$$
$$(L_1,0)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1^i \\ U\underset{A}{\otimes}P_1^i \end{pmatrix}\cong L_1\underset{A}{\otimes}P_1^i$$

所以

$$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1 \\ U\underset{A}{\otimes}P_1 \end{pmatrix}\cong L_1\underset{A}{\otimes}P_1$$

由引理2中1)知L_1是absolutely clean右A-模,所以序列$L_1\underset{A}{\otimes}P_1$正合,从而序列$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} P_1 \\ U\underset{A}{\otimes}P_1 \end{pmatrix}$正合,因此$\begin{pmatrix} M_1 \\ U\underset{A}{\otimes}M_1 \end{pmatrix}$是PGACF左$\boldsymbol{T}$-模.

2) 因为M_2是PGACF左B-模,所以存在投射左B-模的正合列

$$P_2:\cdots\to P_2^{-1}\xrightarrow{d_2^{-1}}P_2^0\xrightarrow{d_2^0}P_2^1\to\cdots$$

使得$M_2\cong\mathrm{Ker}(d_2^0)$,并且对任意的absolutely clean右$B$-模$\boldsymbol{Q}$,序列$Q\underset{B}{\otimes}P_2$正合.因此由引理1知存在投射左$\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix}=\cdots\to\begin{pmatrix} 0 \\ P_2^{-1} \end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ d_2^{-1} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ d_2^0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2^1 \end{pmatrix}\to\cdots$$

使得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix}\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 \\ d_2^0 \end{pmatrix}$$

设$L=(L_1,L_2)_{\varphi_L}$是absolutely clean右$\boldsymbol{T}$-模,由引理2中1)知L_2是absolutely clean右B-模,所以序列$L_2\underset{B}{\otimes}P_2$正合.由文献[9]中的命题3.6.1知:

$$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix}\cong L_2\underset{B}{\otimes}P_2$$

因此序列$(L_1,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \end{pmatrix}$正合,故$\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix}$是PGACF左$\boldsymbol{T}$-模.

定理1　设U_A是有限生成投射模,${}_BU$是平坦模,$r\mathrm{AC}\text{-}d(B)<\infty$.若$M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$是PGACF左$\boldsymbol{T}$-模,则$M_1$是PGACF左$A$-模,$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$是PGACF左$B$-模,且$\varphi^M:U\underset{A}{\otimes}M_1\to M_2$是单同态.

证明　设$M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$是PGACF左$\boldsymbol{T}$-模,则存在投射左$\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$P=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}:\cdots\to\begin{pmatrix} P_1^{-1} \\ P_2^{-1} \end{pmatrix}_{\varphi^{-1}}\xrightarrow{\begin{pmatrix} d_1^{-1} \\ d_2^{-1} \end{pmatrix}}$$
$$\begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}_{\varphi^0}\xrightarrow{\begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{pmatrix}_{\varphi^1}\to\cdots$$

使得$M\cong\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \end{pmatrix}$,并且对任意的absolutely clean右$\boldsymbol{T}$-模$L=(L_1,L_2)_{\varphi_L}$,序列$L\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$正合.由引理1知,存在投射左$A$-模的正合列

$$P_1:\cdots\to P_1^{-1}\xrightarrow{d_1^{-1}}P_1^0\xrightarrow{d_1^0}P_1^1\to\cdots$$

使得$M_1\cong\mathrm{Ker}(d_1^0)$.设$D$是absolutely clean右$A$-模,则有右$\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$0\to(D,0)\to(D,\mathrm{Hom}_A(U,D))\to$$
$$(0,\mathrm{Hom}_A(U,D))\to 0$$

因为$\begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \end{pmatrix}_{\varphi^i}$($i\in\mathbf{Z}$)是投射左$\boldsymbol{T}$-模,所以有复形正合列

$$0\to(D,0)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P\to$$
$$(D,\mathrm{Hom}_A(U,D))\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P\to$$
$$(0,\mathrm{Hom}_A(U,D))\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P\to 0$$

由引理2中2)知$(D,\mathrm{Hom}_A(U,D))$是absolutely clean 右 $\boldsymbol{T}$-模，所以复形 $(D,\mathrm{Hom}_A(U,D))\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$ 正合. 因为 $r\text{AC-}d(B)<\infty$，所以

$$\text{AC-}d_B(\mathrm{Hom}_A(U,D))<\infty$$

从而由引理 3 知：

$$\text{AC-}d_T((0,\mathrm{Hom}_A(U,D)))<\infty$$

由引理 4 得复形 $(0,\mathrm{Hom}_A(U,D))\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$ 正合，因此复形 $(D,0)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$ 正合. 因为

$$(D,0)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P\cong D\underset{A}{\otimes}P_1$$

所以序列 $D\underset{A}{\otimes}P_1$ 正合，故 M_1 是 PGACF 左 A-模.

下证 $\varphi^M:U\underset{A}{\otimes}M_1\to M_2$ 是单同态.

令 $\mu_1:M_1\to P_1^0$ 和 $\mu_2:M_2\to P_2^0$ 是包含映射，考虑如下交换图，如图 3 所示.

$$\begin{tikzcd}
U\underset{A}{\otimes}M_1 \arrow[r, "1\otimes\mu_1"] \arrow[d, "\varphi^M"'] & U\underset{A}{\otimes}P_1^0 \arrow[d, "\varphi^0"] \\
M_2 \arrow[r, "\mu_2"] & P_2^0
\end{tikzcd}$$

图 3　交换图

Fig. 3　Commutative diagram

因为 U_A 是有限生成投射模，所以序列 $U\underset{A}{\otimes}P_1$ 正合，从而 $1\otimes\mu_1$ 是单同态. 由引理 1 知 φ^0 是单同态，故 φ^M 是单同态.

最后证 $\mathrm{Coker}(\varphi^M)=M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$ 是 PGACF 左 B-模.

记 $\bar{d}_2^i:P_2^i/\mathrm{Im}(\varphi^i)\to P_2^{i+1}/\mathrm{Im}(\varphi^{i+1})$，对 $\forall i\in\mathbf{Z}$，考虑如下行正合的交换图，如图 4 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U\underset{A}{\otimes}P_1^0 \arrow[r, "\varphi^0"] \arrow[d, "1\otimes d_1^0"'] & P_2^0 \arrow[r] \arrow[d] & P_2^0/\mathrm{Im}\,\varphi^0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_2^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\underset{A}{\otimes}P_1^1 \arrow[r, "\varphi^1"] \arrow[d, "1\otimes d_1^1"'] & P_2^1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2^1/\mathrm{Im}\,\varphi^1 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_2^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U\underset{A}{\otimes}P_1^2 \arrow[r, "\varphi^2"] \arrow[d] & P_2^2 \arrow[r] \arrow[d] & P_2^2/\mathrm{Im}\,\varphi^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

图 4　交换图

Fig. 4　Commutative diagram

因为 U_A 是有限生成投射模，所以第一列 $U\underset{A}{\otimes}P_1$ 正合，由序列 P 正合知第二列 P_2 正合，因此第三列正合. 由引理 1 知，对任意 i，$P_2^i/\mathrm{Im}\,\varphi^i$ 是投射模，令

$$H:\cdots\to P_2^0/\mathrm{Im}\,\varphi^0\xrightarrow{\bar{d}_2^0}$$
$$P_2^1/\mathrm{Im}\,\varphi^1\xrightarrow{\bar{d}_2^1}P_2^2/\mathrm{Im}\,\varphi^2\to\cdots$$

使得 $M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)\cong\mathrm{Ker}(\bar{d}_2^0)$. 考虑正合列

$$0\to U\underset{A}{\otimes}P_1^i\xrightarrow{\varphi^i}P_2^i\to P_2^i/\mathrm{Im}\,\varphi^i\to 0,\quad\forall i\in\mathbf{Z}$$

设 L_2 是 absolutely clean 右 B-模，用 $L_2\underset{B}{\otimes}-$ 作用上述正合列得正合列

$$L_2\underset{B}{\otimes}(U\underset{A}{\otimes}P_1^i)\xrightarrow{1\otimes\varphi^i}L_2\underset{B}{\otimes}P_2^i\to$$
$$L_2\underset{B}{\otimes}(P_2^i/\mathrm{Im}\,\varphi^i)\to 0$$

因此有

$$L_2\underset{B}{\otimes}(P_2^i/\mathrm{Im}\,\varphi^i)\cong(L_2\underset{B}{\otimes}P_2^i)/\mathrm{Im}(1\otimes\varphi^i)\cong$$
$$(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix}P_1^i\\P_2^i\end{pmatrix}$$

因为 L_2 是 absolutely clean 右 B-模，所以由引理 2 知 $(0,L_2)$ 是 absolutely clean 右 $\boldsymbol{T}$-模. 因此由 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模知序列 $(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$ 正合，从而由

$$L_2\underset{B}{\otimes}(P_2^i/\mathrm{Im}\,\varphi^i)\cong(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}\begin{pmatrix}P_1^i\\P_2^i\end{pmatrix}$$

得 $L_2\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}H\cong(0,L_2)\underset{\boldsymbol{T}}{\otimes}P$ 正合，故 $M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$ 是 PGACF 左 B-模.

由定理 1 得以下推论.

推论 1　设 R 是环，$T(R)=\begin{pmatrix}R&0\\R&R\end{pmatrix}$，$M=$

$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $\boldsymbol{T}(R)$-模. 如果 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}(R)$-模,那么 M_1,M_2 和Coker(φ^M)=$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$是 PGACF 左 R-模,且 φ^M 是单同态.

定理 2　设 U_A 是有限生成投射模,${}_BU$ 是平坦模,$M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是左 $\boldsymbol{T}$-模,PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模对扩张封闭. 如果 M_1 是 PGACF 左 A-模,$M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$是 PGACF 左 B-模,φ^M 是单同态,那么 M 是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模.

证明　因为 φ^M 是单同态,所以存在左 $\boldsymbol{T}$-模的正合列

$$0\rightarrow\begin{pmatrix} M_1 \\ U\bigotimes\limits_A M_1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M) \end{pmatrix}\rightarrow 0$$

由于 M_1 是 PGACF 左 A-模,所以由命题 1 中 1)知 $\begin{pmatrix} M_1 \\ U\bigotimes\limits_A M_1 \end{pmatrix}$是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模. 因为 $M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M)$是 PGACF 左 B-模,所以由命题 1 中 2)知 $\begin{pmatrix} 0 \\ M_2/\mathrm{Im}(\varphi^M) \end{pmatrix}$是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模. 因此 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是 PGACF 左 $\boldsymbol{T}$-模.

参考文献:

[1] FOSSUM R M,GRIFFITH P A,REITEN I. Trivial extensions of abelian categories [M]. Berlin:Springer,1975.

[2] HAGHANY A,VARADARAJAN K. Study of modules over formal triangular matrix rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra,2000,147(1):41-58.

[3] BRAVO D,GILLESPIE J,HOVEY M. The stable module category of a general ring [EB/OL]. (2014-05-22) [2022-06-06]. http://arxiv. org/pdf/1405. 5768. pdf.

[4] BRAVO D,ESTRADA S,IACOB A. FP_n-injective,FP_n-flat covers and preenvelopes,and gorenstein AC-flat covers [J]. Algebra Colloquium,2018,25(2):319-334.

[5] ŠAROCH J,ŠTOVÍČEK J. Singular compactness and definability for Σ-cotorsion and gorenstein modules [J]. Selecta Mathematica,2020,26(2):1-40.

[6] IACOB A. Projectively coresolved gorenstein flat and ding projective modules [J]. Communications in Algebra,2020,48(7):2883-2893.

[7] ZHANG P. Gorenstein projective modules and symmetric recollements [J]. Journal of Algebra,2013,388(16):65-80.

[8] 狄振兴,李晓曼. 三角矩阵环上的 absolutely clean 模与 Gorenstein AC-平坦模 [J]. 山东大学学报(理学版),2020,55(12):81-88.

[9] KRYLOV P,TUGANBAEV A. Formal matrices [M]. Berlin:Springer,2017.