

文章编号: 1673-5196(2024)03-0143-08

基于特征分区的奇异域积分单元细分法

贾志超, 王富顺, 郭前建*, 袁伟, 魏 峰

(山东理工大学 机械工程学院, 山东 淄博 255000)

摘要: 针对传统方法难以解决积分方程中的奇异性问题, 提出一种基于特征分区的奇异域积分单元细分法, 该方法基于体二叉树数据结构对不同形状体单元自适应细分, 能精确计算任意源点位置的三维奇异积分, 消除积分的奇异性. 在笛卡尔坐标系下, 通过在源点构建包围盒对体单元特征分区, 将体单元划分为腔面投影区域和单元细分区域, 依照细分准则对单元细分区域递归细分, 采用腔面重构算法和投影算法, 重新在源点附近生成高质量的积分单元. 数值算例表明, 该方法的积分计算精度、稳定性优于传统单元细分方法.

关键词: 边界元法; 奇异积分; 体二叉树; 特征分区; 单元细分

中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

An element subdivision method for singular domain integrals based on feature partition technique

JIA Zhi-chao, WANG Fu-shun, GUO Qian-jian, YUAN Wei, WEI Zheng

(School of Mechanical Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China)

Abstract: Aiming at the difficulty of solving the singular integrals by traditional algorithms, an adaptive element subdivision method for singular domain integrals based on feature partition technique is presented. The element subdivision method is based on binary-tree data structure, which is applicable to arbitrary shape volume elements with arbitrary locations of the source point. By using the techniques of the binary-tree subdivision scheme, construction of the projection cavities and the cavity projection algorithm, well-shaped patches can be obtained for singular domain integrals. Numerical examples demonstrate that the proposed method has much better accuracy and efficiency than conventional methods.

Key words: boundary element method; singular integrals; volume binary tree; feature partition; element subdivision

边界元法^[1-2]是一种以成熟的边界积分方程理论为基础的数值方法, 具有计算精度高、降维等优势. 但对瞬态热传导^[3-4]、弹性动力学等非线性问题分析时, 由于存在非线性变量, 导致积分方程含有大量的奇异积分^[5-6]. 边界元法分析非均匀介质问题时, 在问题域内划分网格后, 通过域积分计算物理问

题, 域积分的基本解具有奇异性^[7]. 奇异积分指源点在单元内部或边界上的积分, 计算奇异积分时, 当源点离场点越近被积函数值的变化幅度越大, 此时常规的积分方法^[8-9]无法保证积分精度. 因此, 精确、高效的计算边界积分方程中的奇异积分是成功解决非线性问题的关键.

为了提高求解瞬态热传导^[10]、塑性力学等非线性问题的效率, 国内外学者在传统边界元计算领域的基础上提出新的算法. 奇异积分的求解方法主要包括两类: 双重互易法^[11]和直接域积分法^[12]. 双重互易法通过积分转换技术将域积分转变为边界积分或非积分项, 主要思想是将边界离散并且将径向基函数与边界积分方程相结合. 双重互易法的优点为网格划分不会在问题域内进行, 使网格规模降低. 缺

收稿日期: 2022-09-07

基金项目: 国家自然科学基金(12202251, 12172126, 11972010), 中国博士后科学基金(2021M702024, 2022M712393), 教育部产学研合作协同育人项目(220606517023742), 山东省教育厅青创人才引育计划项目, 山东省自然科学基金(ZR2022ME122, ZR2022QA072), 山东省重点研发计划项目(2019GGX104081, 2019GGX104033)

通讯作者: 郭前建(1979-), 男, 山东济南人, 教授, 博导.

Email: guoj_qj_xs@163.com

点为求解不同的物理问题具有一定的局限性,且双重互易法的计算精度对问题域内的内部点具有依赖性.

直接域积分法通过网格单元直接计算域积分,其优点为该方法相对于双重互易法通用性好,不需要对域积分进行变换.其次直接域积分法已应用于瞬态热传导问题的求解,具有更好的计算效率.缺点为该方法需要生成网格解决问题,对域积分计算时,积分精度和效率严重依赖于网格划分的质量^[13].形状复杂的几何模型在网格全自动生成过程中,网格畸变^[14]是不可避免的,因此域积分在这些低质量、不规则网格内进行计算时,会影响最终的数值计算结果.对域积分进行计算时,通常先把体单元细分成若干个积分分子单元,再根据积分准则计算积分^[15].常用的单元细分方法主要包括:传统单元细分法、基于四叉树单元细分法^[16]、球面细分法^[17]等.球面细分法类似于推进前沿法^[18],适用性强,但该方法属于一种经验方法,某些情况下单元细分不收敛.基于四叉树单元细分法通用性强、稳定性好,但在源点附近存在冗余的积分分子单元,计算繁琐效率降低.

传统的体二叉树单元细分法(binary-tree subdivision method, BTSM)^[19-20]基于体二叉树数据结构,先对体单元进行细分,然后在源点附近构建投影腔面,采用腔面投影算法重构源点附近的积分分子单元.其中腔面投影算法为核心算法,涉及大量的求交计算,算法实现较为复杂,计算效率较低.

针对上述单元细分方法存在的困难,本文提出了一种基于特征分区的奇异域积分单元细分法,与传统的 BTSM 不同之处在于,该方法先识别源点所在的区域,通过在源点构建包围盒对体单元进行特征分区,分别构建投影区域和细分区域,然后对投影区域和细分区域进行腔面投影以及自适应细分,算法设计更为简单,计算效率和稳定性好.数值算例表明,基于特征分区的 BTSM 成功实现对不同类型体单元自适应细分,并且可精确高效的计算不规则单元形状的奇异域积分.

1 边界积分方程中的三维奇异积分

三维奇异积分在给定的任意区域中,当源点在积分单元内部时,源点距离场点越近,被积函数的值越大,在源点无限接近场点时,被积函数的值趋于无穷大.这种情况下常规的积分方法无法准确的计算.域积分的求积公式为

$$I(P) = \int_{\Omega} f(P, Q) N(Q) d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{f}(P, Q)}{r^{\beta}(P, Q)} N(Q) d\Omega \quad (1)$$

式中: $r(P, Q)$ 为定义域内源点到场点的距离; β 为常数; $f(P, Q)$ 为被积函数; $\bar{f}(P, Q)$ 为非奇异积分项; $N(Q)$ 为单元形函数.

2 基于特征分区的 BTSM 细分方案

2.1 考虑源点及单元形状的特征分区

对任意类型的体单元,在局部坐标系下识别源点所在区域,为消除积分的奇异性,通过球面与体单元相交构建包围盒,并对体单元进行分区处理.如图 1 所示,以薄型结构中的任一六面体单元为例,特征分区的具体实现步骤如下:

Step 1:识别源点位置.源点与六面体单元的相对位置关系:源点位于体单元内部、源点位于体单元边界、源点位于体单元顶点.根据在体单元内不同的源点位置,构建不同类型的包围盒.

Step 2:生成包围盒.以源点位于六面体单元的顶点为例,以源点为球心,构建一个内径为 r 的球面,通过将球面与体单元的各边求交得到一个内切球面的包围盒,将包围盒作为投影区域,其中图 1 里绿色六面体代表包围盒,不与源点相连的三个紫色面代表腔面.

Step 3:区域划分.利用包围盒对体单元内剩余的区域进行特征分区,将包围盒内的区域定义为投影区域,包围盒以外体单元以内的区域定义为细分区域.

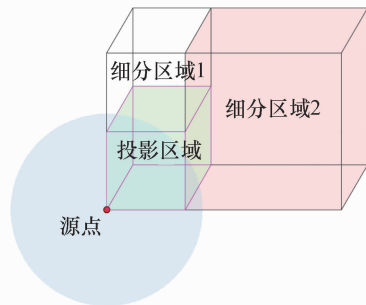


图 1 特征分区示意图

Fig. 1 Schematic diagram of feature partition

传统的单元细分法(conventional subdivision method, CSM)对体单元先进行细分,再在源点附近构建投影腔面,最后采用腔面投影算法重新填充源点附近的腔面^[19].本文的 BTSM 先构建包围盒,利用包围盒对体单元特征分区,划分出投影区域、细分区域,依照细分准则对每个细分区域单独细分,利用腔面构建算法和不同的腔面投影算法对腔面投影

区域进行重构. 与传统的单元细分方法相比, 本文的 BTSM 鲁棒性好、更容易实现区域划分. 基于特征分区的 BTSM 奇异域积分单元细分方案流程图如图 2 所示.

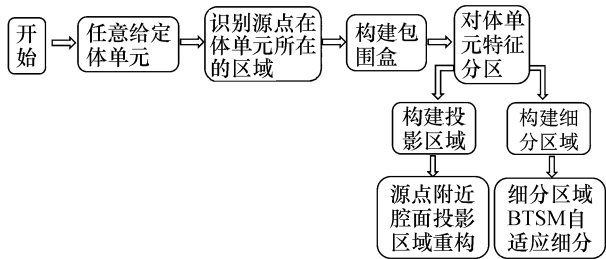


图 2 基于特征分区 BTSM 的单元细分流程图

Fig. 2 Flow diagram of BTSM based on feature partition

2.2 单元细分区域的构建

以六面体单元为例, 构建含有源点的包围盒, 通过延长包围盒边界至体单元边界或利用包围盒直接对体单元特征分区, 在体单元内得到两个包围盒以外的封闭区域, 将该区域作为细分区域. 不同源点位置处构建的包围盒, 对体单元划分的细分区域也不同. 如图 3a 所示, 当源点位置位于体单元的顶点时, 包围盒的边界延长至体单元的边界, 将体单元特征分区, 构建成两个相互接触的细分区域. 如图 3b 所示, 当源点位置位于体单元的内部时, 通过包围盒直接对体单元特征分区, 将体单元分成两个互不接触的细分区域.

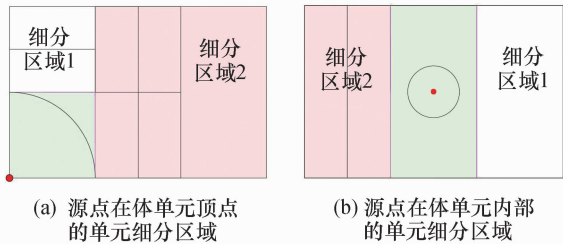


图 3 不同源点位置的细分区域

Fig. 3 Subdivision regions of different source point locations

对体单元特征分区后, 依照体二叉树单元细分准则, 分别对细分区域 1 和细分区域 2 进行递归细分, 直到两个细分区域满足细分准则停止细分.

2.3 腔面投影区域的构建

在笛卡尔坐标系下, 本文以源点为球心, 球径为 r 构建一个球面, 球面与六面体单元的各个边求交, 得到包含长宽高的三维坐标信息, 通过三个坐标构建包围盒, 将包围盒以内的区域作为投影区域. 如图 4 所示, 与细分区域接触的紫色直线代表腔面, 在腔面投影区域中, 重新构建有效投影腔面, 并采用径向腔面投影算法、通用腔面投影算法重构源点附近

的积分单元.

为了提高积分单元的质量, 对投影区域边界进行分割处理, 以提高腔面的质量. 如图 4a 所示, 当源点位置位于体单元的顶点时, 投影区域内的三个节点向源点附近投影. 如图 4b 所示, 源点位于体单元的内部时, 投影区域内的四个节点以及投影区域腔面的两个中点向源点附近投影.

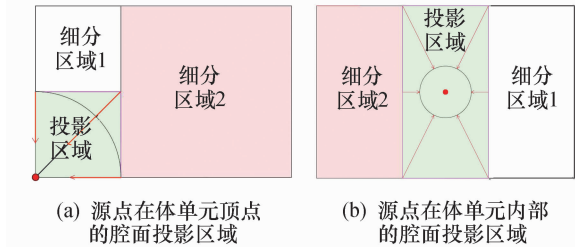


图 4 不同源点位置的腔面投影区域

Fig. 4 Projection regions of different source point locations

3 基于 BTSM 的单元细分准则及方法

3.1 体二叉树单元细分准则

奇异域积分的体二叉树单元的细分准则与单元细分尺寸比率 η 和最小细分尺寸 ϵ 有关, 自适应细分需要满足条件: $\eta < \eta_0$; $l < \epsilon$. 如图 5 所示, $\eta = l/d$, l 为外接球的半径, d 为源点到外接球中心点的距离, η_0 为单元细分尺寸比率的参考值. 三维奇异域积分的最小细分尺寸 $\epsilon = \alpha R_t$, α 为常数, R_t 表示源点距体单元边界的最短距离. 通过最小细分尺寸 ϵ 控制最终细分子块的数量, 避免细分子块无限细分.

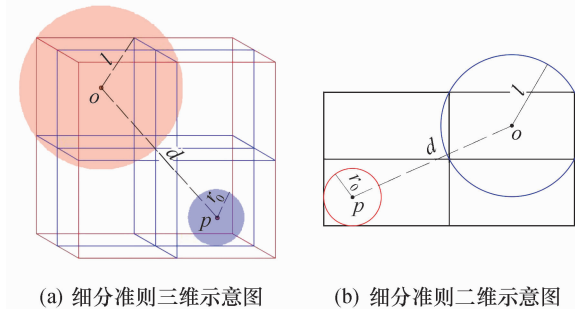


图 5 BTSM 单元细分准则

Fig. 5 Element subdivision criterion of BTSM

3.2 不同类型体单元的细分方式

根据不同的单元类型对体单元进行分类, 可分为六面体单元、三棱柱单元、四面体单元等. 本文基于体二叉树自适应细分的原则, 按照离源点位置由远及近的细分准则, 对类型相同和不同的细分子块递归细分, 直到满足细分要求. 在对体单元细分时, 不同类型的体单元具有不同的细分方式, 但都沿着

体单元最长边的方向进行细分. 如图 6 所示, 几何形状规则的体单元, 如三棱柱单元、规则的六面体单元可分割成两个相同类型的子单元. 几何特征不规则的体单元, 如非结构化的四面体单元, 分为两个不同类型的子单元. 细分时按照二叉树单元细分原则, 保证了各个相邻细分子块的连续性, 不需要使用过渡模板来处理细分子块之间的间隙.

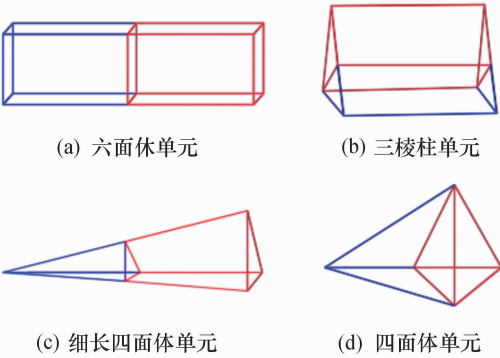


图 6 不同类型体单元的细分方式

Fig. 6 Subdivision of different types of volume element

4 源点附近腔面投影区域重构

4.1 有效投影腔面构建

源点附近的积分存在奇异性, 需要重新在腔面投影区域内构建有效投影腔面. 本文提出了在源点周围搭建一个“阶梯型”的投影腔面, 具体实现步骤如下:

Step 1: 定义腔面投影区域的内外属性. 为重构有效投影腔面, 对包围盒、球面部分置设内外属性, 即位于球面内部、位于包围盒内部以及球面外部等属性. 如图 7 所示, E_1 为球面内部区域, E_2 为跨球面的包围盒区域, E_3 为球面外部的子单元部分.

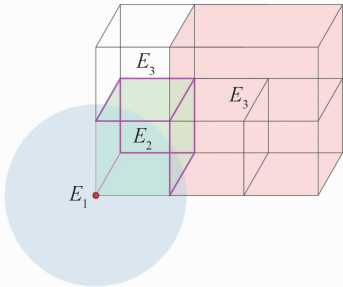


图 7 构建有效投影腔面

Fig. 7 Construction of the valid projection cavity

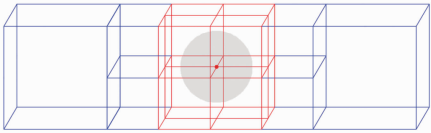
Step 2: 定义积分单元. 在细分子块内, 去除 E_1 球面内部以及 E_2 包围盒, 仅保留 E_3 球面外部的单元部分, 将这部分作为积分单元.

Step 3: 选取腔面. 将 E_2 包围盒与 E_3 球面外部

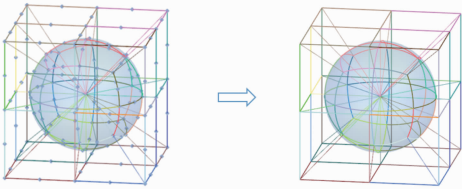
的子单元的接触面作为腔面. 其中图 7 里的紫色矩形面代表腔面.

4.2 径向腔面投影算法

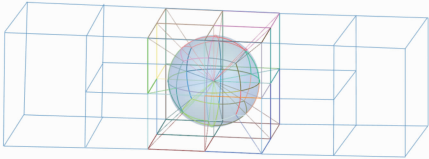
当球体的内径较小时, 外投影腔面是由球面附近的“阶梯型”的细分子面构成, 如四边形、三角形细分子面. 利用径向投影算法, 将外腔面沿着球内径的方向投影, 对球面内部以及球面和外投影腔面之间的间隙进行投影填充. 投影对象不同所使用的填充单元也不同, 如球面内部间隙的填充是通过曲面边界的四面体以及四棱锥细分子块相组合, 球面和外投影腔面的填充是通过曲边界的三棱柱和立方块状体单元相组合. 采用常规的高斯积分准则对三棱柱和立方块状体单元进行积分, 采用哈默斯坦积分方程^[21]计算四面体细分子块. 图 8 给出了利用径向投影法算法进行边界拟合实例.



(a) 体二叉树的单元细分



(b) 有效投影腔面构建及投影点 (c) 球面附近的投影细分子块



(d) 最终单元细分

图 8 径向投影算法示意图

Fig. 8 Overall procedure of the radial cavity projection algorithm

针对奇异域积分, 如图 9 所示, 当球体的内径较大时, 球面和体单元的交集部分会存在一个相交面, 只有将外投影腔面上的点投影到这个相交面上, 才能保证生成高质量的积分子单元. 本文根据腔面上点的位置、体单元边界的数量对不同腔面进行投影. 腔面上点的类型包括: 在细分子块的各个顶点的点称为角点, 在细分子块的每条几何边上的点称为边点, 在细分子块的各个几何面上的点称为面点, 在细分子块内的点称为内部点.

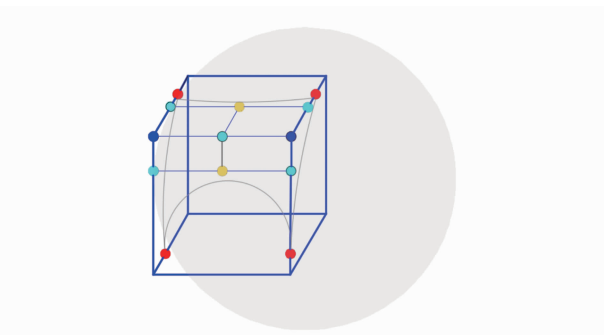


图 9 球面与体单元相交的示意图

Fig. 9 Schematic diagrams of the intersection of a sphere and a volume element

在通用腔面投影算法中,腔面类型不同投影方式也不同.如图 10 所示, P 点为源点,紫色线框为点的环绕腔面, A 为腔面上的点, A' 为投影点.其中 A 的投影方向主要有沿着球内径方向、沿着 AP' 方向、沿着两个基面公共边的方向.根据环绕腔面在细分子块内的位置关系以及不同点的类型主要有以下几种情况:

- 1) 多个环绕腔面不从属于细分子块内的任意一个基面的内部点(图 10a).
- 2) 环绕腔面不从属于细分子块内的任意一个基面的面点(图 10b).
- 3) 多个环绕腔面从属于细分子块内的任意一

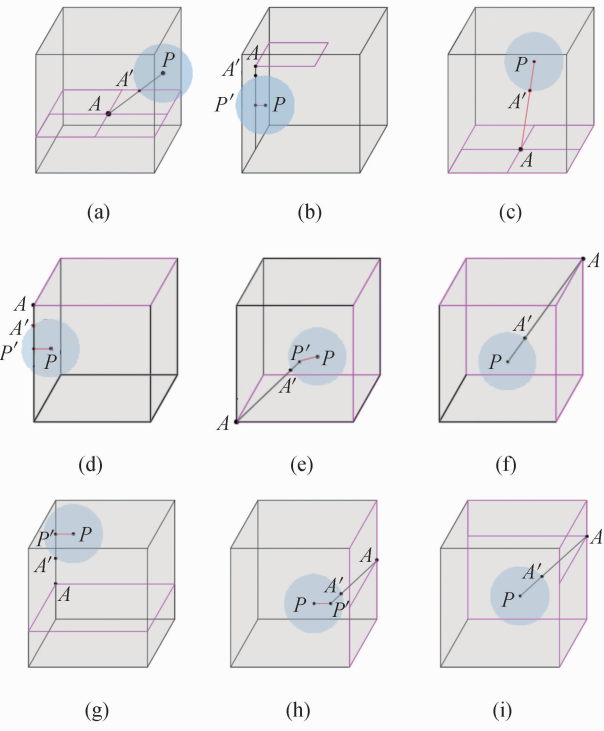


图 10 基于通用腔面投影算法对不同类型腔面上点的投影

Fig. 10 Projection of points on different types of cavity surfaces based on a cavity projection algorithm

- 个基面的面点(图 10c).
- 4) 环绕腔面从属于细分子块内任意一个基面的角点(图 10d).
- 5) 环绕腔面从属于细分子块内任意相邻基面的角点(图 10e).
- 6) 环绕腔面从属于细分子块内全部基面的角点(图 10f).
- 7) 环绕腔面不从属于细分子块内任意一个基面的边点(图 10g).
- 8) 环绕腔面从属于细分子块内任意一个基面的边点(图 10h).
- 9) 环绕腔面从属于细分子块内全部基面的边点(图 10i).

5 数值算例

本文的研究对象为三维体单元的奇异域积分,所研究的单元类型包括四面体单元、三棱柱单元、六面体单元等,积分域为给定的体单元.依据几个算例验证 BTSM 的有效性和可行性,并将 BTSM 与 CSM 进行对比,从积分精度、相对误差方面验证该方法的优势.本文用于奇异积分计算的核函数相关表达式如下:

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi r^2} N d\Omega \tag{2}$$

式中: r 为任意的积分域 Ω 内源点到场点的距离; N 为单元形函数.

$$\delta = \left| \frac{I(n) - I(e)}{I(e)} \right| \tag{3}$$

式中: δ 为相对误差; $I(n)$ 、 $I(e)$ 分别为奇异域积分的数值解和精确解.

5.1 基于 BTSM 奇异域积分的收敛性验证

图 11 给出在源点 $(-0.1, 0.8, -0.1)$ 处细长条状六面体单元细分的一个实例,从图中可看出,依据 BTSM 细分后,细分单元距离源点呈近密远疏分布.如图 12 所示,算例给出了 BTSM 和 CSM 的相对误差随积分点数量变化的情况,验证了 BTSM 具有更好的收敛性,相对于 CSM 可以用更少的积分点数量得到更高的积分精度.

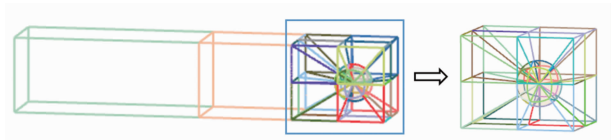


图 11 细长条状六面体单元的细分实例

Fig. 11 Subdivision of a slender hexahedral element

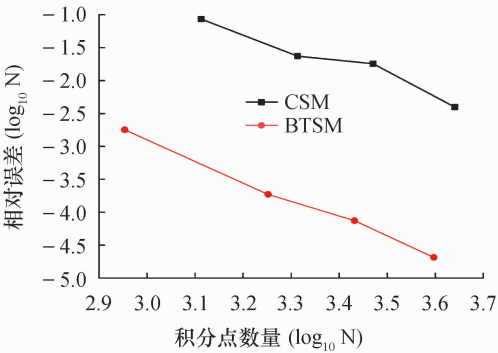


图 12 BTSM 与 CSM 奇异域积分收敛性对比
Fig. 12 Comparison of convergence of BTSM and CSM

5.2 奇异域积分计算数值算例

5.2.1 细长条状三棱柱单元

针对奇异域积分,图 13 给出在源点 $(-0.5, 0.75, 0.125)$ 处细长条状三棱柱单元细分的实例.用于积分计算的四个源点坐标分别为 $M_1(-0.5, 0.75, 0.125)$ 、 $M_2(0, 0.5, 0.25)$ 、 $M_3(0.5, 0.25, 0.375)$ 、 $M_4(1.0, 0, 0.5)$.BTSM 的积分点数量分别为 3 209、2 786、3 669、1 283;CSM 的积分点数量分别为 3 000、3 000、3 993、1 536.

由图 13 可看出 BTSM 得到的积分分子单元质量较高、分布合理.

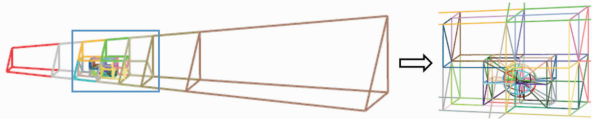


图 13 细长条状三棱柱单元的细分实例
Fig. 13 Subdivision of a slender pentahedral element

算例给出 BTSM 和 CSM 在不同源点下积分点数量以及相对误差的数值结果.如图 14 所示,同一源点位置 BTSM 所需要的积分点数少于 CSM,且 BTSM 的计算精度比 CSM 的计算精度高出 2~3 个数量级,计算精度明显更高.

5.2.2 细长条状四面体单元

图 15 给出在源点 $(0.3, 0.3, 0.3)$ 处细长条状四面体单元细分的实例.用于积分计算的四个源点坐标分别为 $M_5(0.05, 0.05, 0.05)$ 、 $M_6(0.1, 0.1, 0.1)$ 、 $M_7(0.18, 0.18, 0.18)$ 、 $M_8(0.3, 0.3, 0.3)$.BTSM 的积分点数量分别为 3 216、3 606、2 469、3 250;CSM 的积分点数量分别为 2 906、4 000、2 906、2 906.

由图 15 可看出 BTSM 细分后得到的积分分子单元形状、尺寸较好,可直接用于三维奇异域积分的计算.

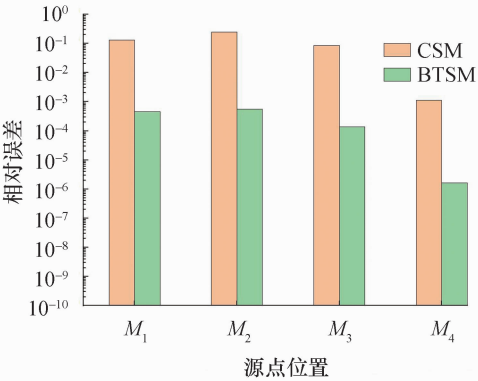


图 14 三棱柱单元奇异域积分的积分计算结果
Fig. 14 Numerical evaluation of singular domain integrals for linear slender pentahedral element

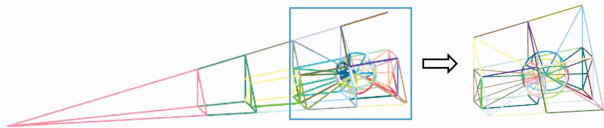


图 15 细长条状四面体单元细分实例
Fig. 15 Subdivision of a slender tetrahedral element

算例给出 BTSM 和 CSM 在不同源点下积分点数量以及相对误差的对比.如图 16 所示,同一源点位置 BTSM 的相对误差远低于 CSM,具有较高的计算效率和精度.

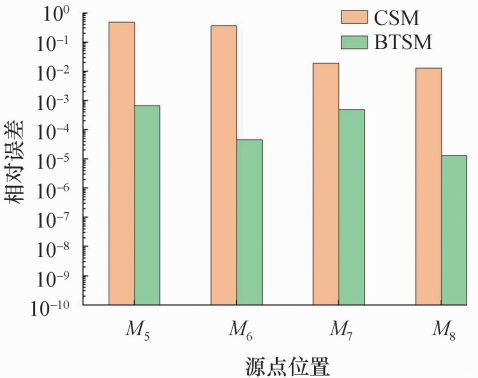


图 16 四面体单元奇异域积分的积分计算结果
Fig. 16 Numerical evaluation of singular domain integrals for linear slender tetrahedral element

5.2.3 细长条状二次三棱柱单元

图 17 为在源点 $(0, 0, 0.5)$ 处细长条状二次三棱柱单元细分的结果.用于积分计算的四个源点坐标分别为 $M_9(-0.5, 0.3, 0.4)$ 、 $M_{10}(0, 0.5, 0.25)$ 、 $M_{11}(0, 0, 0.5)$ 、 $M_{12}(0.5, 0.3, 0.3)$.BTSM 的积分点数量分别为 3 267、2 523、2 606、3 169;CSM 的积分点数量分别为 3 993、3 000、2 762、3 993.

由图 17 可看出 BTSM 细分后得到的积分分子单元形状、尺寸良好.

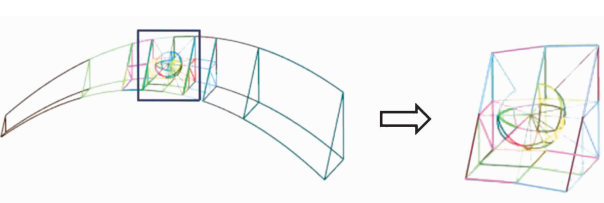


图 17 细长条状二次三棱柱单元的细分实例

Fig. 17 Subdivision of quadratic linear slender pentahedral element

算例给出了细长条状二次三棱柱单元的 BTSM 和 CSM 在不同源点下积分点数量以及相对误差的数值结果. 如图 18 所示, 从 BTSM 与 CSM 的数值结果对比中可以看出, 在同一源点位置 BTSM 比 CSM 计算所需积分点数量更少, 但 BTSM 的计算精度明显更高.

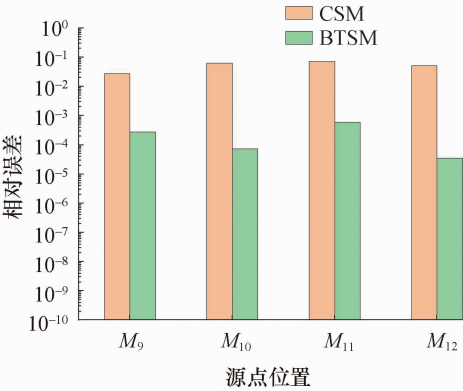


图 18 二次三棱柱单元奇异域积分的积分计算结果

Fig. 18 Numerical evaluation of singular domain integrals for quadratic linear slender pentahedral element

5. 2. 4 细长条状二次四面体单元

图 19 为在源点(0. 05, 0. 05, 0. 05)处细长条状二次四面体单元细分的实例. 用于积分计算的四个源点坐标分别为 M_{13} (0. 05, 0. 05, 0. 05)、 M_{14} (0. 1, 0. 1, 0. 1)、 M_{15} (0. 25, 0. 25, 0. 25)、 M_{16} (0, 0. 1, 0. 1). BTSM 的积分点数量分别为 3 600、3 327、2 700、1 612; CSM 的积分点数量分别为 4 006、4 026、2 906、2 178. 由图 19 可以看出, BTSM 细分后得到的积分分子单元形状、尺寸良好.



图 19 细长条状二次四面体单元的细分实例

Fig. 19 Subdivision of quadratic slender tetrahedral element

图 20 为 BTSM 的数值结果与 CSM 的数值结果对比, 分别列出各自在不同源点处所需积分点数

目以及计算精度的差异. 由图 20 可看出, 在相同的源点位置 BTSM 比 CSM 计算所需积分点数量更少, 而 BTSM 的计算精度比 CSM 的计算精度高出 2~3 个数量级, 计算精度明显更高.

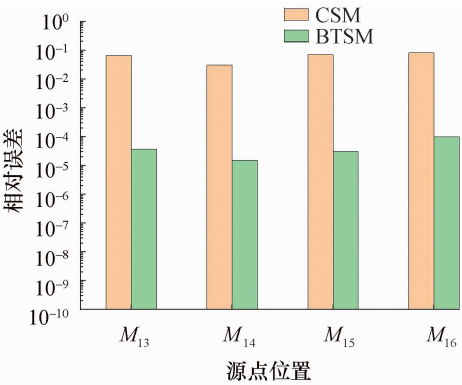


图 20 二次四面体单元奇异域积分的数值计算结果

Fig. 20 Numerical evaluation of singular domain integrals for quadratic linear slender tetrahedral element

6 结论

针对边界元法在计算薄型结构力学问题、裂纹扩展等物理问题时存在大量的奇异域积分的难题, 提出了一种基于特征分区的奇异域积分单元细分法, 该方法具有以下优点:

- 1) 本文方法基于二叉树数据结构对任意源点位置、任意单元形状的奇异域积分都能划分成高质量的积分分子单元.
- 2) 与传统的 BTSM 相比, 基于特征分区的 BTSM 通过球面与体单元相交构建包围盒, 利用包围盒对体单元进行特征分区, 构建腔面投影区域和单元细分区域, 依照细分准则对体单元递归细分, 采用腔面重建算法和投影算法填充细分子域, 重构源点附近的积分分子单元, 算法设计较为简单, 易于实现, 具有良好的鲁棒性.
- 3) 与 CSM 相比, 利用本文方法对体单元细分, 细分子块在源点附近呈现近密远疏的分布状态, 保证了积分效率, 此外基于特征分区的 BTSM 具有较好收敛性, 与 CSM 相比采用较少的积分点可得到更高的积分精度.

因此, 本文提出的基于特征分区的 BTSM 在研究薄型结构力学问题、裂纹问题、V 形切口等奇异性问题中具有良好的应用前景, 为计算机某些工程应用软件的开发提供了理论依据.

致谢: 本文得到山东理工大学自主科研计划项目(4041/420047, 4003/222237, 9101/2222431)的资助, 在此表示感谢.

参考文献:

- [1] 胡宗军,牛忠荣,程长征,等. 薄体结构温度场的高阶边界元分析 [J]. 应用数学和力学, 2015, 36(2): 149-158.
- [2] 姚振汉. 真实梁板壳局部应力分析的高性能边界元法 [J]. 工程力学, 2015, 32(8): 8-15.
- [3] 师晋红,傅卓佳,陈 文. 边界节点法计算二维瞬态热传导问题 [J]. 应用数学和力学, 2014, 35(2): 111-120.
- [4] 张慧华,韩尚宇,胡国栋,等. 瞬态热传导问题的精细积分数值流形方法研究 [J]. 计算力学学报, 2018, 35(1): 44-50.
- [5] 高效伟,冯伟哲,杨 恺. 边界元中计算任意高阶奇异线积分的直接法 [J]. 力学学报, 2014, 46(3): 428-435.
- [6] 李 俊,冯伟哲,高效伟. 一种基于直接计算高阶奇异积分的断裂力学双边积分方程分析法 [J]. 力学学报, 2016, 48(2): 387-398.
- [7] ZHANG J M, CHI B T, KRISHNA M. A binary-tree element subdivision method for evaluation of singular domain integrals with continuous or discontinuous kernel [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 118(3): 14-30.
- [8] 张庆礼,王晓梅,殷绍唐,等. 高阶高斯积分节点的高精度数值计算 [J]. 中国工程科学, 2008, 10(2): 35-40.
- [9] 贾红艳,莫君慧. Cauchy 奇异积分及积分方程的高精度算法 [J]. 兰州理工大学学报, 2013, 39(1): 147-150.
- [10] ZHOU F L, XIE G Z, ZHANG J M, *et al.* Transient heat conduction analysis of solids with small open-ended tubular cavities by boundary face method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(3): 542-550.
- [11] 陈豪龙,周焕林,余 波. 瞬态热传导问题的精细积分-双重互易边界元法 [J]. 应用力学学报, 2017, 34(5): 835-841 + 1009.
- [12] 张继锋,邓子辰,徐方暖,等. 一种新的改进精细直接积分法 [J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(4): 241-245.
- [13] 李 聪,牛忠荣,胡宗军,等. 三维切口/裂纹结构的扩展边界元法分析 [J]. 力学学报, 2020, 52(5): 1394-1408.
- [14] ZHANG J M, CHI B T, WEI C L, *et al.* A dual interpolation boundary face method for three-dimensional potential problems [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2019, 140: 862-876.
- [15] XIE G Z, ZHOU F L, ZHANG J M, *et al.* New variable transformations for evaluating nearly singular integrals in 3D boundary element method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(9): 1169-1178.
- [16] ZHANG J M, QIN X Y, HAN X, *et al.* A boundary face method for potential problems in three dimensions [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 80(3): 320-337.
- [17] 李光耀,何建平,张见明,等. 基于球面细分法的高效高精度近奇异积分计算 [J]. 固体力学学报, 2018, 39(5): 453-461.
- [18] 陈 炎,曹树良,梁开洪,等. 结合前沿推进的 Delaunay 三角化网格生成及应用 [J]. 计算物理, 2009, 26(4): 527-533.
- [19] ZHANG J M, CHI B T, KRISHNA M. A binary-tree element subdivision method for evaluation of nearly singular domain integrals with continuous or discontinuous kernel [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 362: 22-40.
- [20] CHI B T, GUO Q J, ZHANG L G, *et al.* An adaptive binary-tree element subdivision method for evaluation of volume integrals with continuous or discontinuous kernels [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2022, 134: 298-314.
- [21] 林 君,赵 越,蒋川东,等. 基于 Hammer 积分的三维地面磁共振高精度正演方法 [J]. 吉林大学学报(工学版), 2016, 46(2): 609-615.