

文章编号: 1673-5196(2021)02-0151-05

小 R -投射模

王永铎*, 李霞

(兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 引入了小 N -投射模和小 R -投射模的概念, 研究了它们的基本性质. 证明了环 R 是半本原环当且仅当每个右 R -模是小 R -投射模.

关键词: 小 N -投射模; 小 R -投射模; 半本原环; 半完备环

中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A

Small R -projective modules

WANG Yong-duo, LI Xia

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: The concepts of small N -projective modules and small R -projective modules are introduced, basic properties of these modules are studied. It is proved that a ring R is a semiprimitive ring if and only if every right R -module is a small R -projective module.

Key words: small N -projective modules; small R -projective modules; semiprimitive rings; semiperfect rings

在本文中, R 都是有单位元的结合环, 所有的模都是右 R -模. 设 M 和 N 是右 R -模. 称 M 是 N -投射模, 如果每个 M 到 N 的商模的右 R -模同态可以提升到 M 到 N 的右 R -模同态. 称 M 是 R -投射模, 如果 M 是 R_R -投射的. 称 M 是投射模, 如果 M 对任意右 R -模 N 是 N -投射的. 受到文献[1-5]的启发, 本文很自然的引入小 N -投射模和小 R -投射模的概念. 设 M 和 N 是右 R -模. 称 M 是小 N -投射模, 如果对于每个满同态 $f: N \rightarrow N/N_1$ (N_1 是 N 的任意小子模) 和每个同态 $g: M \rightarrow N/N_1$, 存在同态 $h: M \rightarrow N$ 使得 $fh = g$. 称模 M 是小 R -投射模, 如果 M 是小 R_R -投射的. 本文研究了小 N -投射模和小 R -投射模的基本性质, 探讨了它们与已知模类的关系. 证明了环 R 是半本原环当且仅当每个 R -模是小 R -投射模. 本文也引入了小 R -投射盖的概念. 称满同态 $f: P \rightarrow M$ 或 P 是 M 的小 R -投射盖, 如果 P 是小 R -投射模且 f 是小的满同态. 证明了 R 是半完备环当且仅当 $R/J(R)$ 是半单的且每个单 R -模

有小 R -投射盖; R 是右完备环当且仅当 $R/J(R)$ 是半单的且每个半单 R -模有小 R -投射盖.

本文用 $\text{Mod-}R$ 表示右 R -模范畴; 用 $E(M)$, $\text{rad}(M)$ 和 $\tau(M)$ 分别表示右 R -模 M 的内射包, 根, 和预根; 用 $I, J(R)$ 和 $\tau(R)$ 分别表示环 R 的理想, 根和预根. 称 N 的子模 N_1 是 N 的小子模 (记为 $N_1 \ll N$), 如果对 N 的任意真子模 L , 有 $N_1 + L \neq N$. 称 M 是 $\text{rad-}N$ -投射模^[3], 如果对于每个满同态 $f: N \rightarrow K$ (K 是 $N/\text{rad}(M)$ 的商模) 和每个同态 $g: M \rightarrow K$, 存在同态 $h: M \rightarrow N$ 使得 $fh = g$. 称 M 是 rad- 投射模^[3], 如果 M 是 $\text{rad-}R_R$ -投射的. 称 τ 是 $\text{Mod-}R$ 的预根^[5], 如果对任意的 $M \in \text{Mod-}R$ 满足 $\tau(M)$ 是 M 的子模且对每个右 R -模同态 $f: M_R \rightarrow N_R$ 有 $f(\tau(M)) \subseteq \tau(N)$. 称 R 是半本原环^[6], 如果 $J(R) = 0$. 称 R 是局部环^[6], 如果 R 有唯一的极大理想. 称 R 是半完备环^[6], 如果 $\bar{R} := R/J(R)$ 是半单环且 $R/J(R)$ 的幂等元可提升为 R 的幂等元. 称 R 是右完备环^[6], 如果 $R/J(R)$ 是半单的且 $J(R)$ 是 T 幂零的. 称 M 是 hollow 模^[7], 如果 M 的任意真子模是小子模. 称 M 是半平坦模^[7], 如果 M 有唯一的小子模.

定义 1 设 M 和 N 是右 R -模. 称 M 是小 N -投

收稿日期: 2019-12-19

基金项目: 国家自然科学基金(11861043)

通讯作者: 王永铎(1974-), 男, 甘肃靖远人, 博士, 教授.

Email: ydwang@lut.edu.cn

射模,如果对于每个满同态 $f:N\rightarrow N/N_1$ (N_1 是 N 的任意小子模)和每个同态 $g:M\rightarrow N/N_1$,存在同态 $h:M\rightarrow N$ 使得 $fh=g$. 称 M 是小 R -投射模,如果 M 是小 R_R -投射的.

例 1 1) 设 R 是半本原环. 则每个右 R -模 M 是小 R -投射模.

证明 由 R 是半本原环知 $J(R)=0$. 对满同态 $f:R\rightarrow R/0$ 和同态 $g:M\rightarrow R/0$,考虑交换图,如图 1 所示.

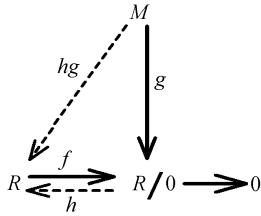


图 1 交换图
Fig. 1 Commutative diagram

因为 $R/0\cong R$ 是投射模,所以 f 可裂,即存在同态 $h:R/0\rightarrow R$ 使得 $fh=1_{R/0}$. 因此存在同态 $hg:M\rightarrow R$,使得 $f(hg)=(fh)g=1_{R/0}g=g$.

2) \mathbf{Z} -模 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$ 是小 \mathbf{Z} -投射模但不是 \mathbf{Z} -投射模.

证明 由 $J(\mathbf{Z})=0$,知每个右 \mathbf{Z} -模 M 是小 \mathbf{Z} -投射模,因此 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$ 是小 \mathbf{Z} -投射模. 下证 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$ 不是 \mathbf{Z} -投射模. 因为 $n\mathbf{Z}$ 不是 \mathbf{Z} 的直和项,所以短正合列 $0\rightarrow n\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\rightarrow 0$ 不可裂. 故 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$ 不是 \mathbf{Z} -投射模.

命题 1 设 R 是环, N 是右 R -模. 则以下几条成立:

- 1) 若 N 是 hollow 模,则小 N -投射模是 N -投射模;
- 2) 若 $\text{rad}(N)\ll N$ 且 $N/\text{rad}(N)$ 是小 N -投射模,则 N 是半平坦模;
- 3) 若 N 是半平坦模,则每个 R -模 M 是小 N -投射模;
- 4) R -模 $\bigoplus_{i\in I}M_i$ 是小 N -投射模当且仅当 $M_i(i\in I)$ 是小 N -投射模.

证明 1) 根据 hollow 模的定义即知.
2) 由 $\text{rad}(N)\ll N$ 且 $N/\text{rad}(N)$ 是小 N -投射模,知存在同态 $h:N/\text{rad}(N)\rightarrow N$,使图 2 可换. 进而可知 $\text{rad}(N)$ 是 N 的直和项,因此 $\text{rad}(N)=0$,即 N 是半平坦模.
3) 因为 N 是半平坦模,所以 $\text{rad}(N)=0$. 再由文献[6]中命题 16.7 知要证 M 是小 N -投射模,即

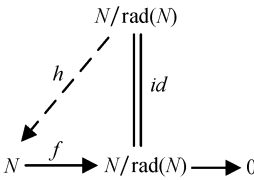


图 2 交换图
Fig. 2 Commutative diagram

证每个同态 $h:M\rightarrow N/0$ 可通过自然满同态 $\pi:N\rightarrow N/0$ 分解. 下证每个同态 $h:M\rightarrow N/0$ 可通过自然满同态 $\pi:N\rightarrow N/0$ 分解. 因为自然满同态 $\pi:N\rightarrow N/0$ 是同构,所以存在同态 $g:N/0\rightarrow N$ 使得 $\pi g=1_{N/0}$. 故存在同态 $gh:M\rightarrow N$ 使得 $\pi(gh)=(\pi g)h=1_{N/0}h=h$,即证.

4) “ \Rightarrow ”设右 R -模 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ 是小 N -投射模. 对满同态 $\beta:N\rightarrow N/N_1$ (N_1 是 N 的任意小子模)和同态 $\varphi:M_i\rightarrow N/N_1(i\in I)$,考虑交换图,如图 3 所示.

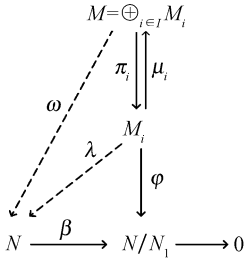


图 3 交换图
Fig. 3 Commutative diagram

其中 μ_i 和 π_i 是自然嵌入和自然投影. 因为 M 是小 N -投射模. 所以存在 $\omega:M\rightarrow N$ 使得 $\varphi\pi_i=\beta\omega$. 因此存在 $\lambda:=\omega\mu_i$,使得 $\beta\lambda=\beta\omega\mu_i=\varphi\pi_i\mu_i=\varphi 1_{M_i}=\varphi$.

“ \Leftarrow ”设 $M_i(i\in I)$ 是小 N -投射模. 对满同态 $\beta:N\rightarrow N/N_1$ (N_1 是 N 的任意小子模)和同态 $\varphi:M\rightarrow N/N_1$,考虑交换图,如图 4 所示.

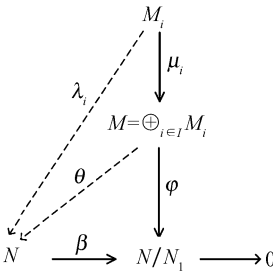


图 4 交换图
Fig. 4 Commutative diagram

因为 M_i 是小 N -投射模, 所以存在 $\lambda_i: M_i \rightarrow N$ 使得 $\varphi\mu_i = \beta\lambda_i$. 根据直和的泛性质, 存在唯一的 $\theta: M \rightarrow N$ 使得 $\theta\mu_i = \lambda_i$. 再由 $\beta\theta\mu_i = \beta\lambda_i = \varphi\mu_i$ 和 θ 的唯一性可知 $\beta\theta = \varphi$.

命题2 设 R 是环, M 和 N 是右 R -模. 则以下两条等价:

1) M 是小 N -投射模;

2) 对 N 的任意小子模 N_1 , 由满态 $f: N \rightarrow N/N_1$ 所诱导的同态 $f_*: \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N/N_1)$ 是满态.

证明 1) \Rightarrow 2) 设 M 是小 N -投射模, N_1 是 N 的任意小子模, $f: N \rightarrow N/N_1$ 是满同态, $g \in \text{Hom}_R(M, N/N_1)$. 因为 M 是小 N -投射模, 所以存在同态 $h: M \rightarrow N$, 使得 $f_*h = fh = g$, 故 f_* 是满态.

2) \Rightarrow 1) 显然.

命题3 局部环 R 上的右 R -模 M 是小 R -投射模当且仅当 M 是 R -投射模.

证明 “ \Rightarrow ” 因为 R 是局部环, 所以它有唯一极大理想 $J(R)$ 且 $J(R)$ 是 R 的小理想. 由 R 是有限生成的, 知 R 的每个真理想都包含在极大理想 $J(R)$ 中, 从而 R 的每个真理想都是小理想. 因此小 R -投射模 M 也是 R -投射模.

“ \Leftarrow ” 显然.

推论1 局部环 R 上的有限生成的小 R -投射模 M 是投射模.

证明 由命题3和文献[8]中的定理2.1可知.

命题4 设 N 是右 R -模. 若 $\text{rad}(N) \ll N$ 且 $N/\text{rad}(N)$ 是半单的, 则每个小 N -投射模 M 是 rad - N -投射模.

证明 由 $\text{rad}(N) \ll N$ 且 M 是小 N -投射的知每个同态 $f: M \rightarrow N/\text{rad}(N)$ 可提升到同态 $g: M \rightarrow N$. 又因为 $N/\text{rad}(N)$ 是半单的, 由文献[5]中的命题3.14可知, M 是 rad - N -投射模.

推论2 设 R 是半完备环. 若右 R -模 M 满足 $\text{rad}(M) \ll M$ 且 M 是小 R -投射模, 则 M 是投射模.

证明 由 R 是半完备环, 知 $R/J(R)$ 是半单的. 又因为 $J(R) \ll R$ 且 M 是小 R -投射模, 所以 M 是 rad -投射模. 再由 $\text{rad}(M) \ll M$ 和文献[5]中的定理4.7知 M 是投射模.

注1 小 R -投射模的子模不一定是小 R -投射模. 当环 $R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 时 (其中 p 为素数), R 是小 R -投射模但它的非零理想 $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \simeq R/p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ 不是小 R -投射模. 因为 $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \ll R$ 不是 R 的直和项, 所以不存在 $h: R/p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow R$, 使图5可换.

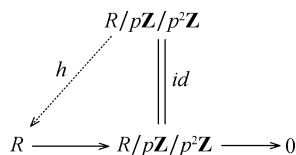


图5 交换图

Fig. 5 Commutative diagram

定理1 设 R 是环, M 是右 R -模. 则以下几条等价:

1) 每个小 $E(M)$ -投射模的子模是小 $E(M)$ -投射模;

2) 每个投射模的子模是小 $E(M)$ -投射模;

3) R 的每个右理想是小 $E(M)$ -投射模;

4) $E(M)/E_1(M)$ ($E_1(M)$ 是 $E(M)$ 的任意小子模) 是内射模.

证明 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 4) 设 I 是 R 的右理想. 考虑交换图, 如图6所示.

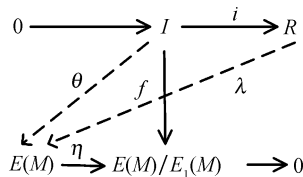


图6 交换图

Fig. 6 Commutative diagram

其中 $i: I \rightarrow R$ 为嵌入映射. 因为 I 是小 $E(M)$ -投射模, 所以存在同态 $\theta: I \rightarrow E(M)$ 使得 $\eta\theta = f$. 由 $E(M)$ 是内射模, 知存在同态 $\lambda: R \rightarrow E(M)$ 使得 $\lambda|_I = \theta$. 又因为 $\eta\lambda|_I = \eta\theta = f$, 所以同态 $\eta\lambda: R \rightarrow E(M)/E_1(M)$ 是 f 的扩张, 故 $E(M)/E_1(M)$ 是内射模.

4) \Rightarrow 1) 设 B 是小 $E(M)$ -投射模且 A 是 B 的子模. 考虑交换图, 如图7所示.

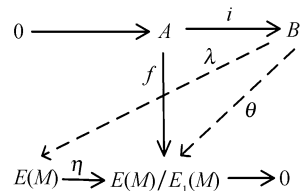


图7 交换图

Fig. 7 Commutative diagram

因为 $E(M)/E_1(M)$ 是内射模, 所以 f 可以扩张到同态 $\theta: B \rightarrow E(M)/E_1(M)$. 又因为 B 是小 $E(M)$ -投射模, 所以存在 $\lambda: B \rightarrow E(M)$ 使得 $\eta\lambda = \theta$. 因此存在同态 $g = \lambda i: A \rightarrow E(M)$, 使得对任意 $x \in$

A 有 $\eta g(x) = \eta \lambda i(x) = \eta \lambda(x) = \theta(x) = f(x)$, 故 A 是小 $E(M)$ -投射模.

推论 3 设 M 是内射 R -模. 则以下几条等价:

- 1) 每个小 M -投射模的子模是小 M -投射模;
- 2) 每个投射模的子模是小 M -投射模;
- 3) R 的每个右理想是小 M -投射模;
- 4) $M/M_1(M_1$ 是 M 的任意小子模)是内射模.

命题 5 若 R -模 M 满足 $\text{Ext}_R^1(M, I) = 0(I$ 是 R 的任意小右理想), 则 M 是小 R -投射模. 当 R 是自内射环时, 反之成立.

证明 用 $\text{Hom}_R(M, -)$ 作用在短正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0(I$ 是 R 的任意小右理想)上, 可得以下长正合列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R/I) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, I) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \dots$. 因为 $\text{Ext}_R^1(M, I) = 0$, 所以 M 是小 R -投射模. 反之因为 R 是自内射环^[9], 所以 $\text{Ext}_R^1(M, R) = 0$. 再由 M 是小 R -投射模, 可知同态 $\text{Hom}_R(M, R) \rightarrow \text{Hom}_R(M, R/I)$ 是满态. 因此 $\text{Ext}_R^1(M, I) = 0$.

定理 2 设 R 是环. 则以下几条等价:

- 1) R 是半本原环;
- 2) 每个右 R -模是小 R -投射模;
- 3) 每个有限生成的右 R -模是小 R -投射模;
- 4) 每个右 R -模 $R/I(I$ 是 R 的任意小右理想)是小 R -投射模;
- 5) 右 R -模 $R/J(R)$ 是小 R -投射模.

证明 1) \Rightarrow 2) 由例 1 可知.

2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) 显然.

5) \Rightarrow 1) 因为 $R/J(R)$ 是小 R -投射模, 所以存在 $g: R/J(R) \rightarrow R$ 使图 8 可换.

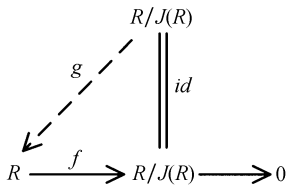


图 8 交换图 8

Fig. 8 Commutative diagram 8

进而可知 $J(R)$ 是 R 的直和项, 故 $J(R) = 0$. 因此 R 是半本原环.

推论 4 若 R 是有限余生成的且 $R/J(R)$ 是小 R -投射模, 则 R 是半单环.

证明 因为 $R/J(R)$ 是小 R -投射模, 所以 $J(R) = 0$. 再由 R 是有限余生成的和文献[10]中的 21.14 可知, R 是半单环.

命题 6 设 R 是环, τ 是预根且 $\tau(R) = 0$. 如果

M 是小 R -投射模, 那么 $M/\tau(M)$ 是小 R -投射模.

证明 设 M 是小 R -投射模. 对同态 $f: M/\tau(M) \rightarrow R/I(I$ 是 R 的任意小右理想)和满同态 $\eta: R \rightarrow R/I$, 考虑交换, 如图 9 所示.

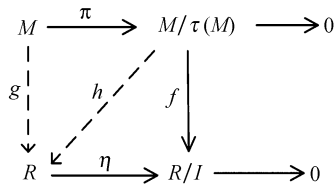


图 9 交换图

Fig. 9 Commutative diagram

其中 $\pi: M \rightarrow M/\tau(M)$ 是自然满同态. 由 M 是小 R -投射模知存在同态 $g: M \rightarrow R$ 使得 $f\pi = \eta g$. 因为 $g(\tau(M)) \subseteq \tau(R) = 0$, 所以 $\tau(M) \subseteq \text{Ker}(g)$, 故存在态射 $h: M/\tau(M) \rightarrow R$, 使得 $h\pi = g$. 又因为 $\eta h\pi = \eta g = f\pi$ 且 π 是满同态, 所以 $\eta h = f$. 因此 $M/\tau(M)$ 是小 R -投射模.

定义 2 设 R 是环, M 是右 R -模. 称满同态 $f: P \rightarrow M$ 或 P 是 M 的小 R -投射盖, 如果 P 是小 R -投射模且 f 是小的满同态(即 $\text{Ker } f \ll P$).

注 2 众所周知, R 是半完备环当且仅当每个有限生成的 R -模有投射盖, R 是右完备环当且仅当每个 R -模有投射盖. 但每个有限生成的 R -模有小 R -投射盖, R 不一定是半完备环; 每个 R -模有小 R -投射盖, R 不一定是右完备环. 例如每个有限生成的阿贝尔群有小 \mathbb{Z} -投射盖, 但 \mathbb{Z} 不是半完备环; 每个阿贝尔群有小 \mathbb{Z} -投射盖, 但 \mathbb{Z} 不是右完备环.

定理 3 设 R 是环. 则以下几条等价:

- 1) R 是半完备环;
- 2) $R/J(R)$ 是半单的且每个有限生成的 R -模有小 R -投射盖;
- 3) $R/J(R)$ 是半单的且每个单 R -模有小 R -投射盖.

证明 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 1) 因为 $R/J(R)$ 是半单的且每个单 R -模有小 R -投射盖, 所以每个单 R -模有 rad -投射盖. 再由文献[3]中定理 18 可知 R 是半完备环.

定理 4 设 R 是环. 则以下几条等价:

- 1) R 是右完备环;
- 2) $R/J(R)$ 是半单的且每个 R -模有小 R -投射盖;
- 3) $R/J(R)$ 是半单的且每个半单 R -模有小 R -投射盖.

证明 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) 显然.

3) \Rightarrow 1) 由定理 3 知 R 是半完备的. 设 M 是半

单 R -模, $f: P \rightarrow M$ 是 M 的小 R -投射盖. 由文献 [11] 中的推论 9.1.5 可知, $\text{rad}(P) = f^{-1}(0) = \text{Ker } f \ll P$. 再由推论 2 知 P 是投射的, 即证.

定理 5 设 $g: P \rightarrow M/\text{rad}(M) \rightarrow 0$ 是 $M/\text{rad}(M)$ 的投射盖. 若 M 是小 P -投射模, 则 $M = N \oplus K$, 其中 N 是投射模, K 是 $\text{rad}(M)$ 的子模, $N \cap \text{rad}(M) \ll N$. 特别地, 若 $\text{rad}(M) \ll M$, 则 M 是投射模.

证明 对满同态 $g: P \rightarrow M/\text{rad}(M)$ 和自然满同态 $\eta: M \rightarrow M/\text{rad}(M)$, 考虑交换图, 如图 10 所示.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \lambda \swarrow & \downarrow \eta & \\ P & \xrightarrow{g} & M/\text{rad}(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

图 10 交换图

Fig. 10 Commutative diagram

因为 $M/\text{rad}(M) \simeq P/\text{Ker}(g)$ 且 M 是小 P -投射模, 所以存在 $\lambda: M \rightarrow P$ 使得 $g\lambda = \eta$. 由 $P = \text{Ker}(g) + \text{Im}(\lambda)$ 且 $\text{Ker}(g) \ll P$, 知 $P = \text{Im}(\lambda)$. 又因为 P 是投射模, 所以 λ 可裂且 $M = N \oplus \text{Ker}(\lambda)$ (其中 N 是 M 的子模且 $N \simeq P$ 是投射模), 因此 $K := \text{Ker}(\lambda) \subseteq \text{Ker}(\eta) = \text{rad}(M)$. 定义 $h := \eta|_N: N \rightarrow M/\text{rad}(M)$ 和 $\lambda_1 := \lambda|_N: N \rightarrow P$, 则易知 λ_1 是同构, $N \cap \text{rad}(M) = \text{Ker}(h) = \text{Ker}(g\lambda_1) = \lambda_1^{-1}\text{Ker}(g) \ll N$. 若 $\text{rad}(M) \ll M$, 则 $M = N$ 是投射模.

参考文献:

- [1] ALAGOZ Y, BUYUKASIK E. Max-projective modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2020, 19(3): 2150095.
- [2] 李煜彦, 何东林. 内射模和投射模的推广 [J]. 兰州理工大学学报, 2011, 37(5): 153-157.
- [3] AMIN I, IBRAHIM Y, YOUSIF M. Rad-projective and strongly rad-projective modules [J]. Communications in Algebra, 2013, 41(6): 2174-2179.
- [4] 王永铎, 李丹丹. 单 Rickart 模 [J]. 兰州理工大学学报, 2018, 44(6): 148-150.
- [5] AMIN I, IBRAHIM Y, YOUSIF M. T-projective and strongly τ -projective modules [C]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Contemporary ring theory, 2012: 209-235.
- [6] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and categories of modules [M]. 2nd ed. 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006.
- [7] 许庆兵, 郭 栋, 陈华喜. 小伪投射模及其自同态环 [J]. 西华大学学报(自然科学版), 2013, 32(2): 28-30.
- [8] ALHILALI H, IBRAHIM Y, PUNINSKI G. When R is a testing modules for projectivity [J]. Journal of Algebra, 2017, 484: 198-206.
- [9] LAM T Y. Lectures on modules and rings [M]. New York: Springer R-Verlag, 1999.
- [10] WISBAUER R. Foundations of module and ring theory [M]. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
- [11] KASH F. Modules and rings [M]. London: Academic Press, 1982.