文章编号：1673-5196(2021)02-0151-05

小 *R*-投射模

王永铎*，李　霞

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州　730050）

摘要：引入了小 N-投射模和小 R-投射模的概念，研究了它们的基本性质. 证明了环 R 是半本原环当且仅当每个右 R-模是小 R-投射模.

关键词：小 N-投射模；小 R-投射模；半本原环；半完备环

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：**A

Small *R*-projective modules

WANG Yong-duo, LI Xia

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou　730050, China)

Abstract: The concepts of small N-projective modules and small R-projective modules are introduced, basic properties of these modules are studied. It is proved that a ring R is a semiprimitive ring if and only if every right R-module is a small R-projective module.

Key words: small N-projective modules; small R-projective modules; semiprimitive rings; semiperfect rings

在本文中，R 都是有单位元的结合环，所有的模都是右 R-模. 设 M 和 N 是右 R-模. 称 M 是 N-投射模，如果每个 M 到 N 的商模的右 R-模同态可以提升到 M 到 N 的右 R-模同态. 称 M 是 R-投射模，如果 M 是 R_R-投射的. 称 M 是投射模，如果 M 对任意右 R-模 N 是 N-投射的. 受到文献[1-5]的启发，本文很自然的引入小 N-投射模和小 R-投射模的概念. 设 M 和 N 是右 R-模. 称 M 是小 N-投射模，如果对于每个满同态 $f:N\to N/N_1$（N_1 是 N 的任意小子模）和每个同态 $g:M\to N/N_1$，存在同态 $h:M\to N$ 使得 $fh=g$. 称模 M 是小 R-投射模，如果 M 是小 R_R-投射的. 本文研究了小 N-投射模和小 R-投射模的基本性质，探讨了它们与已知模类的关系. 证明了环 R 是半本原环当且仅当每个 R-模是小 R-投射模. 本文也引入了小 R-投射盖的概念. 称满同态 $f:P\to M$ 或 P 是 M 的小 R-投射盖，如果 P 是小 R-投射模且 f 是小的满同态. 证明了 R 是半完备环当且仅当 $R/J(R)$ 是半单的且每个单 R-模有小 R-投射盖；R 是右完备环当且仅 $R/J(R)$ 是半单的且每个半单 R-模有小 R-投射盖.

本文用 Mod-R 表示右 R-模范畴；用 $E(M)$，rad(M)和 $\tau(M)$分别表示右 R-模 M 的内射包，根，和预根；用 I，$J(R)$和 $\tau(R)$分别表示环 R 的理想，根和预根. 称 N 的子模 N_1 是 N 的小子模（记为 $N_1\ll N$），如果对 N 的任意真子模 L，有 $N_1+L\neq N$. 称 M 是 rad-N-投射模[3]，如果对于每个满同态 $f:N\to K$（K 是 $N/\mathrm{rad}(M)$的商模）和每个同态 $g:M\to K$，存在同态 $h:M\to N$ 使得 $fh=g$. 称 M 是 rad-投射模[3]，如果 M 是 rad-R_R-投射的. 称 τ 是 Mod-R 的预根[5]，如果对任意的 $M\in$ Mod-R 满足 $\tau(M)$是 M 的子模且对每个右 R-模同态 $f:M_R\to N_R$ 有 $f(\tau(M))\subseteq\tau(N)$. 称 R 是半本原环[6]，如果 $J(R)=0$. 称 R 是局部环[6]，如果 R 有唯一的极大理想. 称 R 是半完备环[6]，如果 $\bar{R}:=R/J(R)$是半单环且 $R/J(R)$的幂等元可提升为 R 的幂等元. 称 R 是右完备环[6]，如果 $R/J(R)$是半单的且 $J(R)$是 T 幂零的. 称 M 是 hollow 模[7]，如果 M 的任意真子模是小子模. 称 M 是半平坦模[7]，如果 M 有唯一的小子模.

定义 1　设 M 和 N 是右 R-模. 称 M 是小 N-投

收稿日期：2019-12-19
基金项目：国家自然科学基金(11861043)
通讯作者：王永铎(1974-)，男，甘肃靖远人，博士，教授.
Email：ydwang@lut.edu.cn

射模,如果对于每个满同态 $f:N\to N/N_1$(N_1 是 N 的任意小子模)和每个同态 $g:M\to N/N_1$,存在同态 $h:M\to N$ 使得 $fh=g$. 称 M 是小 R-投射模,如果 M 是小 R_R-投射的.

例 1 1) 设 R 是半本原环. 则每个右 R-模 M 是小 R-投射模.

证明 由 R 是半本原环知 $J(R)=0$. 对满同态 $f:R\to R/0$ 和同态 $g:M\to R/0$,考虑交换图,如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, dashed, "hg"'] \arrow[d, "g"] & \\
R \arrow[r, shift left, "f"] & R/0 \arrow[l, dashed, shift left, "h"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

因为 $R/0\simeq R$ 是投射模,所以 f 可裂,即存在同态 $h:R/0\to R$ 使得 $fh=1_{R/0}$. 因此存在同态 $hg:M\to R$,使得 $f(hg)=(fh)g=1_{R/0}g=g$.

2) $\mathbf{Z}$-模 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$是小 $\mathbf{Z}$-投射模但不是 $\mathbf{Z}$-投射模.

证明 由 $J(\mathbf{Z})=0$,知每个右 $\mathbf{Z}$-模 M 是小 $\mathbf{Z}$-投射模,因此 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$是小 $\mathbf{Z}$-投射模. 下证 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$不是 $\mathbf{Z}$-投射模. 因为 $n\mathbf{Z}$ 不是 $\mathbf{Z}$ 的直和项,所以短正合列 $0\to n\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\to 0$ 不可裂. 故 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(n\neq 0,1)$不是 $\mathbf{Z}$-投射模.

命题 1 设 R 是环,N 是右 R-模. 则以下几条成立:

1) 若 N 是 hollow 模,则小 N-投射模是 N-投射模;

2) 若 $\mathrm{rad}(N)\ll N$ 且 $N/\mathrm{rad}(N)$是小 N-投射模,则 N 是半平坦模;

3) 若 N 是半平坦模,则每个 R-模 M 是小 N-投射模;

4) R-模$\oplus_{i\in I}M_i$ 是小 N-投射模当且仅当 M_i $(i\in I)$是小 N-投射模.

证明 1) 根据 hollow 模的定义即知.

2) 由 $\mathrm{rad}(N)\ll N$ 且 $N/\mathrm{rad}(N)$是小 N-投射模,知存在同态 $h:N/\mathrm{rad}(N)\to N$,使图 2 可换.

$$\begin{tikzcd}
& N/\mathrm{rad}(N) \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, equal, "id"] & \\
N \arrow[r, "f"] & N/\mathrm{rad}(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2 交换图

Fig. 2 Commutative diagram

进而可知 $\mathrm{rad}(N)$是 N 的直和项,因此$\mathrm{rad}(N)=0$,即 N 是半平坦模.

3) 因为 N 是半平坦模,所以 $\mathrm{rad}(N)=0$. 再由文献[6]中命题16.7知要证M是小N-投射模,即证每个同态 $h:M\to N/0$ 可通过自然满同态 $\pi:N\to N/0$ 分解. 下证每个同态 $h:M\to N/0$ 可通过自然满同态 $\pi:N\to N/0$ 分解. 因为自然满同态 $\pi:N\to N/0$ 是同构,所以存在同态 $g:N/0\to N$ 使得 $\pi g=1_{N/0}$. 故存在同态 $gh:M\to N$ 使得 $\pi(gh)=(\pi g)h=1_{N/0}h=h$,即证.

4) "$\Rightarrow$"设右 R-模 $M=\oplus_{i\in I}M_i$ 是小 N-投射模. 对满同态 $\beta:N\to N/N_1$(N_1 是 N 的任意小子模)和同态 $\varphi:M_i\to N/N_1(i\in I)$,考虑交换图,如图 3 所示.

$$\begin{tikzcd}
& M=\oplus_{i\in I}M_i \arrow[ddl, dashed, "\omega"'] \arrow[d, shift right, "\pi_i"'] & \\
& M_i \arrow[u, shift right, "\mu_i"'] \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
N \arrow[r, "\beta"] & N/N_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3 交换图

Fig. 3 Commutative diagram

其中 μ_i 和 π_i 是自然嵌入和自然投影. 因为 M 是小 N-投射模. 所以存在 $\omega:M\to N$ 使得 $\varphi\pi_i=\beta\omega$. 因此存在 $\lambda:=\omega\mu_i$,使得 $\beta\lambda=\beta\omega\mu_i=\varphi\pi_i\mu_i=\varphi 1_{M_i}=\varphi$.

"$\Leftarrow$"设 $M_i(i\in I)$是小 N-投射模. 对满同态 $\beta:N\to N/N_1$(N_1 是 N 的任意小子模)和同态 $\varphi:M\to N/N_1$,考虑交换图,如图 4 所示.

$$\begin{tikzcd}
& M_i \arrow[ddl, dashed, "\lambda_i"'] \arrow[d, "\mu_i"] & \\
& M=\oplus_{i\in I}M_i \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\
N \arrow[r, "\beta"] & N/N_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 4 交换图

Fig. 4 Commutative diagram

因为 M_i 是小 N-投射模,所以存在 $\lambda_i:M_i \to N$ 使得 $\varphi\mu_i=\beta\lambda_i$. 根据直和的泛性质,存在唯一的 $\theta:M\to N$ 使得 $\theta\mu_i=\lambda_i$. 再由 $\beta\theta\mu_i=\beta\lambda_i=\varphi\mu_i$ 和 θ 的唯一性可知 $\beta\theta=\varphi$.

命题 2　设 R 是环,M 和 N 是右 R-模. 则以下两条等价:

1) M 是小 N-投射模;

2) 对 N 的任意小子模 N_1,由满态 $f:N\to N/N_1$ 所诱导的同态 $f_*:\mathrm{Hom}_R(M,N)\to \mathrm{Hom}_R(M,N/N_1)$是满态.

证明　1)⇒2) 设 M 是小 N-投射模,N_1 是 N 的任意小子模,$f:N\to N/N_1$ 是满同态,$g\in \mathrm{Hom}_R(M,N/N_1)$. 因为 M 是小 N-投射模,所以存在同态 $h:M\to N$,使得 $f_*h=fh=g$,故 f_* 是满态.

2)⇒1)显然.

命题 3　局部环 R 上的右 R-模 M 是小 R-投射模当且仅当 M 是 R-投射模.

证明　"⇒"因为 R 是局部环,所以它有唯一极大理想 $J(R)$且 $J(R)$是 R 的小理想. 由 R 是有限生成的,知 R 的每个真理想都包含在极大理想 $J(R)$中,从而 R 的每个真理想都是小理想. 因此小 R-投射模 M 也是 R-投射模.

"⇐"显然.

推论 1　局部环 R 上的有限生成的小 R-投射模 M 是投射模.

证明　由命题 3 和文献[8]中的定理 2.1 可知.

命题 4　设 N 是右 R-模. 若 $\mathrm{rad}(N)\ll N$ 且 $N/\mathrm{rad}(N)$是半单的,则每个小 N-投射模 M 是 rad-N-投射模.

证明　由 $\mathrm{rad}(N)\ll N$ 且 M 是小 N-投射的知每个同态 $f:M\to N/\mathrm{rad}(N)$可提升到同态 $g:M\to N$. 又因为 $N/\mathrm{rad}(N)$是半单的,由文献[5]中的命题 3.14 可知,M 是 rad-N-投射模.

推论 2　设 R 是半完备环. 若右 R-模 M 满足 $\mathrm{rad}(M)\ll M$ 且 M 是小 R-投射模,则 M 是投射模.

证明　由 R 是半完备环,知 $R/J(R)$是半单的. 又因为 $J(R)\ll R$ 且 M 是小 R-投射模,所以 M 是 rad-投射模. 再由 $\mathrm{rad}(M)\ll M$ 和文献[5]中的定理 4.7 知 M 是投射模.

注 1　小 R-投射模的子模不一定是小 R-投射模. 当环 $R=\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ 时(其中 p 为素数),R 是小 R-投射模但它的非零理想 $p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}\simeq R/p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ 不是小 R-投射模. 因为 $p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}\ll R$ 不是 R 的直和项,所以不存在 $h:R/p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}\to R$,使图 5 可换.

$$\begin{tikzcd}
 & R/p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, equal, "id"] & \\
R \arrow[r] & R/p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 5　交换图

Fig. 5　Commutative diagram

定理 1　设 R 是环,M 是右 R-模. 则以下几条等价:

1) 每个小 $E(M)$-投射模的子模是小 $E(M)$-投射模;

2) 每个投射模的子模是小 $E(M)$-投射模;

3) R 的每个右理想是小 $E(M)$-投射模;

4) $E(M)/E_1(M)$($E_1(M)$是 $E(M)$的任意小子模)是内射模.

证明　1)⇒2)⇒3)显然.

3)⇒4)设 I 是 R 的右理想. 考虑交换图,如图 6 所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "f"] & R \arrow[dll, dashed, "\lambda"] \\
E(M) \arrow[r, "\eta"] & E(M)/E_1(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 6　交换图

Fig. 6　Commutative diagram

其中 $i:I\to R$ 为嵌入映射. 因为 I 是小 $E(M)$-投射模,所以存在同态 $\theta:I\to E(M)$使得 $\eta\theta=f$. 由 $E(M)$是内射模,知存在同态 $\lambda:R\to E(M)$使得 $\lambda|_I=\theta$. 又因为 $\eta\lambda|_I=\eta\theta=f$,所以同态 $\eta\lambda:R\to E(M)/E_1(M)$是 f 的扩张,故 $E(M)/E_1(M)$是内射模.

4)⇒1) 设 B 是小 $E(M)$-投射模且 A 是 B 的子模. 考虑交换图,如图 7 所示.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dll, dashed, "\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\
E(M) \arrow[r, "\eta"] & E(M)/E_1(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 7　交换图

Fig. 7　Commutative diagram

因为 $E(M)/E_1(M)$是内射模,所以 f 可以扩张到同态 $\theta:B\to E(M)/E_1(M)$. 又因为 B 是小 $E(M)$-投射模,所以存在 $\lambda:B\to E(M)$使得 $\eta\lambda=\theta$. 因此存在同态 $g=\lambda i:A\to E(M)$,使得对任意 $x\in$

A 有 $\eta g(x)=\eta\lambda i(x)=\eta\lambda(x)=\theta(x)=f(x)$，故 A 是小 $E(M)$-投射模.

推论 3　设 M 是内射 R-模. 则以下几条等价：

1) 每个小 M-投射模的子模是小 M-投射模；

2) 每个投射模的子模是小 M-投射模；

3) R 的每个右理想是小 M-投射模；

4) M/M_1(M_1 是 M 的任意小子模)是内射模.

命题 5　若 R-模 M 满足 $\mathrm{Ext}_R^1(M,I)=0$(I 是 R 的任意小右理想)，则 M 是小 R-投射模. 当 R 是自内射环时，反之成立.

证明　用 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 作用在短正合列 $0\to I\to R\to R/I\to 0$(I 是 R 的任意小右理想)上，可得以下长正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,I)\to\mathrm{Hom}_R(M,R)\to\mathrm{Hom}_R(M,R/I)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,I)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,R)\to\cdots$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^1(M,I)=0$，所以 M 是小 R-投射模. 反之因为 R 是自内射环[9]，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(M,R)=0$. 再由 M 是小 R-投射模，可知同态 $\mathrm{Hom}_R(M,R)\to\mathrm{Hom}_R(M,R/I)$ 是满态. 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(M,I)=0$.

定理 2　设 R 是环. 则以下几条等价：

1) R 是半本原环；

2) 每个右 R-模是小 R-投射模；

3) 每个有限生成的右 R-模是小 R-投射模；

4) 每个右 R-模 R/I(I 是 R 的任意小右理想)是小 R-投射模；

5) 右 R-模 $R/J(R)$是小 R-投射模.

证明　1)⇒2) 由例 1 可知.

2)⇒3)⇒4)⇒5)显然.

5)⇒1)因为 $R/J(R)$是小 R-投射模，所以存在 $g:R/J(R)\to R$ 使图 8 可换.

$$\begin{tikzcd}
 & R/J(R) \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, equal, "id"] & \\
R \arrow[r, "f"] & R/J(R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 8　交换图 8

Fig. 8　Commutative diagram 8

进而可知 $J(R)$是 R 的直和项，故 $J(R)=0$. 因此 R 是半本原环.

推论 4　若 R 是有限余生成的且 $R/J(R)$是小 R-投射模，则 R 是半单环.

证明　因为 $R/J(R)$是小 R-投射模，所以 $J(R)=0$. 再由 R 是有限余生成的和文献[10]中的 21.14 可知，R 是半单环.

命题 6　设 R 是环，τ 是预根且 $\tau(R)=0$. 如果 M 是小 R-投射模，那么 $M/\tau(M)$是小 R-投射模.

证明　设 M 是小 R-投射模. 对同态 $f:M/\tau(M)\to R/I$(I 是 R 的任意小右理想)和满同态 $\eta:R\to R/I$，考虑交换，如图 9 所示.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "g"'] & M/\tau(M) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & 0 \\
R \arrow[r, "\eta"] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 9　交换图

Fig. 9　Commutative diagram

其中 $\pi:M\to M/\tau(M)$是自然满同态. 由 M 是小 R-投射模知存在同态 $g:M\to R$ 使得 $f\pi=\eta g$. 因为 $g(\tau(M))\subseteq\tau(R)=0$，所以 $\tau(M)\subseteq\mathrm{Ker}(g)$，故存在态射 $h:M/\tau(M)\to R$，使得 $h\pi=g$. 又因为 $\eta h\pi=\eta g=f\pi$ 且 π 是满同态，所以 $\eta h=f$. 因此 $M/\tau(M)$是小 R-投射模.

定义 2　设 R 是环，M 是右 R-模. 称满同态 $f:P\to M$ 或 P 是 M 的小 R-投射盖，如果 P 是小 R-投射模且 f 是小的满同态(即 $\mathrm{Ker}\ f\ll P$).

注 2　众所周知，R 是半完备环当且仅当每个有限生成的 R-模有投射盖，R 是右完备环当且仅当每个 R-模有投射盖. 但每个有限生成的 R-模有小 R-投射盖，R 不一定是半完备环；每个 R-模有小 R-投射盖，R 不一定是右完备环. 例如每个有限生成的阿贝尔群有小 $\mathbf{Z}$-投射盖，但 $\mathbf{Z}$ 不是半完备环；每个阿贝尔群有小 $\mathbf{Z}$-投射盖，但 $\mathbf{Z}$ 不是右完备环.

定理 3　设 R 是环. 则以下几条等价：

1) R 是半完备环；

2) $R/J(R)$是半单的且每个有限生成的 R-模有小 R-投射盖；

3) $R/J(R)$是半单的且每个单 R-模有小 R-投射盖.

证明　1)⇒2)⇒3)显然.

3)⇒1)因为 $R/J(R)$是半单的且每个单 R-模有小 R-投射盖，所以每个单 R-模有 rad-投射盖. 再由文献[3]中定理 18 可知 R 是半完备环.

定理 4　设 R 是环. 则以下几条等价：

1) R 是右完备环；

2) $R/J(R)$是半单的且每个 R-模有小 R-投射盖；

3) $R/J(R)$是半单的且每个半单 R-模有小 R-投射盖.

证明　1)⇒2)⇒3)显然.

3)⇒1)由定理 3 知 R 是半完备的. 设 M 是半

单 R-模，$f:P\to M$ 是 M 的小 R-投射盖. 由文献[11]中的推论 9.1.5 可知，$\mathrm{rad}(P)=f^{-1}(0)=\mathrm{Ker}\, f\ll P$. 再由推论 2 知 P 是投射的，即证.

定理 5　设 $g:P\to M/\mathrm{rad}(M)\to 0$ 是 $M/\mathrm{rad}(M)$ 的投射盖. 若 M 是小 P-投射模，则 $M=N\oplus K$，其中 N 是投射模，K 是 $\mathrm{rad}(M)$ 的子模，$N\cap \mathrm{rad}(M)\ll N$. 特别地，若 $\mathrm{rad}(M)\ll M$，则 M 是投射模.

证明　对满同态 $g:P\to M/\mathrm{rad}(M)$ 和自然满同态 $\eta:M\to M/\mathrm{rad}(M)$，考虑交换图，如图 10 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "\lambda"'] \arrow[d, "\eta"] & \\
P \arrow[r, "g"] & M/\mathrm{rad}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 10　交换图

Fig. 10　Commutative diagram

因为 $M/\mathrm{rad}(M)\simeq P/\mathrm{Ker}(g)$ 且 M 是小 P-投射模，所以存在 $\lambda:M\to P$ 使得 $g\lambda=\eta$. 由 $P=\mathrm{Ker}(g)+\mathrm{Im}(\lambda)$ 且 $\mathrm{Ker}(g)\ll P$，知 $P=\mathrm{Im}(\lambda)$. 又因为 P 是投射模，所以 λ 可裂且 $M=N\oplus\mathrm{Ker}(\lambda)$（其中 N 是 M 的子模且 $N\simeq P$ 是投射模），因此 $K:=\mathrm{Ker}(\lambda)\subseteq\mathrm{Ker}(\eta)=\mathrm{rad}(M)$. 定义 $h:=\eta|_N:N\to M/\mathrm{rad}(M)$ 和 $\lambda_1:=\lambda|_N:N\to P$，则易知 λ_1 是同构，$N\cap\mathrm{rad}(M)=\mathrm{Ker}(h)=\mathrm{Ker}(g\lambda_1)=\lambda_1^{-1}\mathrm{Ker}(g)\ll N$. 若 $\mathrm{rad}(M)\ll M$，则 $M=N$ 是投射模.

参考文献：

[1] ALAGOZ Y，BUYUKASIK E. Max-projective modules [J]. Journal of Algebra and Its Applications，2020，19(3)：2150095.

[2] 李煜彦，何东林. 内射模和投射模的推广 [J]. 兰州理工大学学报，2011，37(5)：153-157.

[3] AMIN I，IBRAHIM Y，YOUSIF M. Rad-projective and strongly rad-projective modules [J]. Communications in Algebra，2013，41(6)：2174-2179.

[4] 王永铎，李丹丹. 单 Rickart 模 [J]. 兰州理工大学学报，2018，44(6)：148-150.

[5] AMIN I，IBRAHIM Y，YOUSIF M. T-projective and strongly τ-projective modules [C]. Singapore：World Scientific Publishing Co Pte Ltd，Contemporary ring theory，2012：209-235.

[6] ANDERSON F W，FULLER K R. Rings and categories of modules [M]. 2nd ed. 北京：世界图书出版公司北京公司，2006.

[7] 许庆兵，郭　栋，陈华喜. 小伪投射模及其自同态环 [J]. 西华大学学报(自然科学版)，2013，32(2)：28-30.

[8] ALHILALI H，IBRAHIM Y，PUNINSKI G. When R is a testing modules for projectivity [J]. Journal of Algebra，2017，484：198-206.

[9] LAM T Y. Lectures on modules and rings [M]. New York：Springe R-Verlag，1999.

[10] WISBAUER R. Foundations of module and ring theory [M]. Philadelphia：Gordon and Breach，1991.

[11] KASH F. Modules and rings [M]. London：Academic Press，1982.