文章编号：1673-5196(2021)03-0156-06

GI_{ac}-内射模与GI_{ac}-平坦模的环刻画

陈　东*

（成都大学 信息科学与工程学院，四川 成都　610106）

摘要：引入GI_{ac}-内射模和GI_{ac}-平坦模的概念，是介于GI-内射模（或GI-平坦模）与余纯内射模（或余纯平坦模）之间的一种模类. 用上述模刻画了诸多环类，如：半单环、von Neumann 正则环、遗传环和半遗传环.

关键词：GI_{ac}-内射模；GI_{ac}-平坦模；半单环；von Neumann 正则环；(半)遗传环

中图分类号：O154　　**文献标志码**：A

Ring characterizations on GI_{ac}- injective and GI_{ac}-flat modules

CHEN Dong

(College of information science and engineering, Chengdu University, Chengdu　610106, China)

Abstract: The concept of GI_{ac}-injective modules and GI_{ac}-flat modules , is introduced respectively, which is a class of modules between GI-injective modules (or GI-flat modules) and copure injective modules (or copure flat modules). Some classes of rings, such as semisimple rings, von Neumann regular rings, hereditary rings and semihereditary rings, are characterized in terms of these modules.

Key words: GI_{ac}-injective modules; GI_{ac}-flat modules; semisimple rings; von Neumann regular rings; (semi)hereditary rings

2012年，Gao[1]在研究Gorenstein内射盖的核时，引入了GI-内射模的概念. 称R-模M是GI-内射模，若存在同态$\varphi:A\to B$，使得$M\cong\ker(\varphi)$，其中$\varphi:A\to B$是B的Gorenstein内射盖. 这个定义也等价于：M是GI-内射模当非仅当对任意的Gorenstein的内射模N，有$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 2013年，Gao[2]又引入了GI-平坦模的概念. 称R-模M是GI-平坦模，若对任意的Gorenstein内射模N，有$\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$. 与此同时，M的GI-内射维数$G\text{-id}_RM$和M的GI-平坦维数$G\text{-fd}_RM$相继被引入[3-4]：

$G\text{-id}_RM=\inf\{n\mid$对任意的Gorenstein内射模$N$，都有$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0$，其中$n$为非负整数$\}$；

$G\text{-fd}_RM=\inf\{n\mid$对任意的Gorenstein内射模$N$，都有$\mathrm{Tor}^R_{n+1}(N,M)=0$，其中$n$为非负整数$\}$.

相应地，环R的GI-整体维数$GI\text{-iD}(R)$以及GI-弱整体维数$GI-\mathrm{fD}(R)$定义为

$$GI-\mathrm{iD}(R)=\sup\{G-\mathrm{id}_RM\mid \text{其中}M\text{是任意的}R\text{-模}\}$$

$$GI-\mathrm{fD}(R)=\sup\{G-\mathrm{fd}_RM\mid \text{其中}M\text{是任意的}R\text{-模}\}$$

特别地，Gao[1]证明了R是半单环当且仅当每个R-模是GI-内射模，R是von Neumann正则环当且仅当每个余挠模是GI-内射模；Gao[2]证明了R是von Neumann正则环当且仅当每个R-模是GI-平坦模.

2017年，Zhao等[5]用Ding内射模代替Gorenstein内射模，由此又引入了DI-内射模和DI-平坦模的概念. 称R-模M是DI-内射模，若对任意的Ding-内射模N，有$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 称R-模M是DI-平坦模，若对任意Ding内射模N，有$\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$. 称R-模M是Ding内射模，如果存在内射模的正合列：

$$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$$

使得$M\cong\mathrm{Ker}(E_0\to E^0)$，且对任意的$FP$-内射模$I$，函子$\mathrm{Hom}_R(I,-)$使上述正合列保持正合.

收稿日期：2020-06-18

基金项目：国家自然科学基金(11671283)，四川省教育厅基金(18ZB0138)，四川省高校重点实验室开放基金(MSSB-2020-06)

通讯作者：陈　东(1983-)，男，四川成都人，硕士，讲师. Email：chendong@cdu.edu.cn

相应地，Zhao 等[5]定义了 M 的 DI-内射维数 $DI\text{-}\mathrm{id}_R M$ 和 DI-平坦维数 $DI\text{-}\mathrm{fd}_R M$，以及环 R 的 DI-整体维数 $DI\text{-}\mathrm{iD}(R)$ 和 DI-弱整体维数 $DI\text{-}\mathrm{fD}(R)$. 作为 DI-内射模和 DI-平坦模的环刻画，Zhao 等[5]也证明了 R 是半单环当且仅当每个 R-模是 DI-内射模；R 是 von Neumann 正则环当且仅当每个 R-模是 DI-平坦模.

受以上思想的启发，本文用 Gorenstein AC-内射模代替 Gorenstein 内射模，由此引入 GI_{ac}-内射模和 GI_{ac}-平坦模的概念. 称 R-模 M 是 Gorenstein AC-内射模，如果存在内射模的正合列：

$$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(E_0\to E^0)$，且对任意的绝对 clean 模 I，函子 $\mathrm{Hom}_R(I,-)$ 使上述正合列保持正合. 称 R-模 M 为绝对 clean 模，是指对任意的超有限表现模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 模 N 称为超有限表现模，是指存在以下正合列：$\cdots\to F_n\to\cdots\to F_1\to F_0\to N\to 0$，其中每个 F_i 是有限生成的自由模. 容易看到，GI_{ac}-内射模是介于 GI-内射模与余纯内射模之间的一种模类，GI_{ac}-平坦模是介于 GI-平坦模与余纯平坦模之间的一个模类. Gao[1]和 Zhao 等[5]均未给出 GI-内射模和 DI-内射模的例子，本文给出了一个 GI_{ac}-内射模的具体例子，此例同时说明了 GI_{ac}-内射模是真包含于余纯内射模.

注意，Gao[1]和 Zhao 等[5]用 GI-内射模（或 GI-平坦模）和 DI-内射模（或 DI-平坦模）分别刻画了半单环、von Neumann 正则环、遗传环和半遗传环. 一个自然的问题是，能否也用 GI_{ac}-内射模和 GI_{ac}-平坦模刻画上述环类？本文肯定的回答了这个问题，证明了每个 R-模是 GI_{ac}-内射模当且仅当 R 是半单环，每个 R-模是 GI_{ac}-平坦模当且仅当 R 是 von Neumann 正则环. 相应地，定义 R-模 M 的 GI_{ac}-内射维数和 GI_{ac}-平坦维数，及环 R 的 GI_{ac}-整体维数 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)$ 及 GI_{ac}-弱整体维数 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)$. 证明了 R 是遗传环当且仅当 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$，且每个 GI_{ac}-内射模是内射模；R 是凝聚环，则 R 是半遗传环当且仅当 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)\leqslant 1$，且每个 GI_{ac}-平坦模是平坦模.

为方便讨论，需回顾相关概念：

设 $\mathcal{C}$ 是 R-模类且 M 是一个 R-模. 称一个态射 $\varphi:M\to C$ 为 M 的 $\mathcal{C}$-预包络，若 $C\in\mathcal{C}$ 且对每个态射 $g:M\to C'$，其中 $C'\in\mathcal{C}$ 存在态射 $f:C\to C'$，使得 $g=f\varphi$. 一个 $\mathcal{C}$-预包络 $\varphi:M\to C$ 称为 $\mathcal{C}$-包络，若满足 $g\varphi=\varphi$ 的自同态 $g:C\to C$ 均是同构. 一般情况下，$\mathcal{C}$-包络未必存在，但若存在，则在同构意义下必唯一. 对偶地，有 $\mathcal{C}$-预覆盖的定义. 若态射 $\varphi:M\to C$ 满足 $\mathrm{coker}(\varphi)\in{}^{\perp}\mathcal{C}$，则称 $\varphi:M\to C$ 是 M 的特殊的 $\mathcal{C}$- 预包络；反之，若态射 $\varphi:C\to M$ 满足 $\ker(\varphi)\in\mathcal{C}^{\perp}$，则称 $\varphi:C\to M$ 是 M 的特殊的 $\mathcal{C}$-预覆盖.

称 R-模 M 是余纯内射模，若对任意的内射模 E，有 $\mathrm{Ext}_R^1(E,M)=0$；称 R-模 M 是余纯平坦模，若对任意的内射模 E，有 $\mathrm{Tor}_1^R(E,M)=0$. 正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 称为纯正合列，是指对任意的 R-模 X，诱导序列 $0\to A\otimes X\to B\otimes X\to C\otimes X\to 0$ 仍是正合列. 若对纯正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 及 R-模 M，其诱导序列 $0\to\mathrm{Hom}_R(C,M)\to\mathrm{Hom}_R(B,M)\to\mathrm{Hom}_R(A,M)\to 0$ 仍是正合列，则 M 称为纯内射模.

称 R-模 M 为 Gorenstein AC-投射模，指存在投射模 P_i,P^i 的正合列 $\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P_0\to P^0)$，且对任意的 level 模 Q，函子 $\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ 使上述正合列保持正合. 称 R-模 M 为 level 模，是指对任意的超有限表现模 N，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$. 称 R-模 M 为 Gorenstein AC-平坦模，是指存在平坦模 F_i,F^i 的正合列

$$\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F_0\to F^0)$，且对任意的绝对 clean 模 I，函子 $I\otimes-$ 使上述正合列保持正合. 相关概念，参见文献[6-14]，不再赘述.

本文所涉及的环均是有单位元的交换的结合环，所涉及的模均是酉模. 用 $D(R)$ 表示环 R 的整体维数，$wD(R)$ 表示环 R 的弱整体维数，M^+ 表示模 M 的特征模 $\mathrm{Hom}_z(M,Q/Z)$. 设是 L 模类，用 ${}^{\perp}L$ 和 $L^{\perp}$ 分别表示 L 的左、右正交类.

1　主要结果

首先引入 GI_{ac}-内射模和 GI_{ac}-平坦模的概念，可以看到 GI_{ac}-内射模是介于 GI-内射模与余纯内射模之间的一个模类，GI_{ac}-平坦模是介于 GI-平坦模与余纯平坦模之间的一个模类.

定义 1　称 R-模 M 是 GI_{ac}-内射模，若对任意的 Gorenstein AC-内射模 N，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$；称 R-模 M 是 GI_{ac}-平坦模，若对任意的 Gorenstein AC-内射模 N，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$.

注 1　1）由文献[9]中的定义知，{Gorenstein AC-内射模}⊆{Gorenstein 内射模}，于是存在以下包含关系：

{内射模}⊆{GI-内射模}⊆{GI_{ac}-内射模}⊆{余纯内射模}

{平坦模}⊆{GI-平坦模}⊆{GI_{ac}-平坦模}⊆{余纯平坦模}

2) 若 R 是 Noether 环,则 Gorenstein 内射模就是 Gorenstein AC-内射模,此时{GI-内射模}={GI_{ac}-内射模};若 $D(R)<\infty$,则 Gorenstein AC-内射模是内射模,此时 {GI_{ac}-内射模}={余纯内射模}.

3) 若 R 是凝聚环,则 FP-内射模等价于绝对 clean 模. 此时,Gorenstein 平坦模就是 Gorenstein AC-平坦模.

4) 若 R 既是 Noether 环,又是完全环,则投射模等价于 level 模. 此时,Gorenstein 投射模就是 Gorenstein AC-投射模.

5) 由同构关系 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M^+)\cong\mathrm{Tor}_1^R(N,M)^+$,$M$ 是 GI_{ac}-平坦模当且仅当 M^+ 是 GI_{ac}-内射模.

现举一个余纯内射模,但不是 GI_{ac}-内射模的例子.

例 1 设 $R=k[X]/(X^2)$,k 是域,$(\overline{X})$表示多项式环 $k[X]$的商环,则$(\overline{X})$是余纯内射模,但不是 GI_{ac}-内射模.

证明 显然,R 是 QF 环,故$(\overline{X})$是 Gorenstein 内射模,从而也是余纯内射模. 于是存在$(\overline{X})$的全内射分解:

$$\cdots\to R\xrightarrow{f}R\xrightarrow{f}R\to\cdots$$

使得 $\ker(f)=\mathrm{Im}(f)=(\overline{X})$. 现证$(\overline{X})$不是 GI_{ac}-内射模. 由定义 1,只需证对任意的 Gorenstein AC-内射模 N,有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,(\overline{X}))\neq0$. 由于$(\overline{X})$ 是 Gorenstein 内射模,由注 1 中 2)知,$(\overline{X})$也是 Gorenstein AC-内射模,故只需证明 $\mathrm{Ext}_R^1((\overline{X}),(\overline{X}))\neq0$. 反证,考虑正合列 $0\to(\overline{X})\to R\to(\overline{X})\to0$,若 $\mathrm{Ext}_R^1((\overline{X}),(\overline{X}))=0$,该正合列可裂,故$(\overline{X})$是 R 的直和项,从而$(\overline{X})$ 是内射模. 这与文献[15]中的例 2.5(2),$(\overline{X})$不是内射模矛盾. 因此,$(\overline{X})$不是 GI_{ac}-内射模.

命题 1 设 M 是R-模,以下各条等价:

1) M 是 GI_{ac}-内射模;

2) 对正合列 $0\to M\to E\to L\to0$,其中 E 是 Gorenstein AC-内射模,则 $E\to L$ 是 L 的 Gorenstein AC-内射预覆盖;

3) 同态:$E(M)\to E(M)/M$ 是 $E(M)/M$ 的 Gorenstein AC-内射预覆盖,其中 $E(M)$表示 M 的内射包络;

4) M 是某个R-模 B 的 Gorenstein AC-内射预覆盖 $g:A\to B$ 的核,其中 A 是内射模;

5) 对正合列 $0\to A\to B\to C\to0$,其中 C 是 Gorenstein AC-内射模,函子 $\mathrm{Hom}_R(-,M)$使该正合列保持正合.

证明 1)⇒2) 由文献[9]中的命题 5.10 知,每个 R-模 M 有 Gorenstein AC-内射预包络,于是存在以下正合列:$0\to M\to E\to L\to0$,其中 E 是 Gorenstein AC-内射模. 现设 N 是任意的 Gorenstein AC-内射模. 由于 M 是 GI_{ac}-内射模,故诱导出一个正合列:$\mathrm{Hom}_R(N,E)\to\mathrm{Hom}_R(N,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$,因而有 $E\to L$ 是 L 的 Gorenstein AC-内射预覆盖;

2)⇒3) 由于 $0\to M\to E(M)\to E(M)/M\to0$ 是正合列,其中 $E(M)$表示 M 的内射包络,故也是 Gorenstein AC-内射模. 由 2)知,$E(M)\to E(M)/M$ 是 $E(M)/M$ 的 Gorenstein AC-内射预覆盖;

3)⇒4) 显然;

4)⇒1) 设 $M\cong\mathrm{Ker}(g)$,于是存在正合列:$0\to M\to A\to A/M\to0$,其中 A 是内射模. 故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N,又可以诱导出正合列:$\mathrm{Hom}_R(N,A)\to\mathrm{Hom}_R(N,A/M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,A)=0$,由 4)知,$\mathrm{Hom}_R(N,A)\to\mathrm{Hom}_R(N,A/M)\to0$ 是正合列,故 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$,从而 M 是 GI_{ac}-内射模;

1)⇒5) 显然;

5)⇒1) 设 N 是任意的 Gorenstein AC-内射模,故存在正合列:$0\to K\to P\to N\to0$,其中 P 是投射模. 对 R-模 M,可诱导出正合列:$\mathrm{Hom}_R(P,M)\to\mathrm{Hom}_R(K,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(P,M)=0$. 由 5)知,函子 $\mathrm{Hom}_R(-,M)$使该正合列保持正合,即 $\mathrm{Hom}_R(P,M)\to\mathrm{Hom}_R(K,M)\to0$ 是正合列. 因此,$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$,从而 M 是 GI_{ac}- 内射模.

命题 2 设 M 是R-模,以下各条等价:

1) M 是 GI_{ac}- 平坦模;

2) $M={}^{\perp}\mathcal{C}$,其中 $\mathcal{C}=\{B^+\mid B$ 是 GI_{ac}-内射模$\}$;

3) 对正合列 $0\to A\to B\to C\to0$,其中 C 是 Gorenstein AC-内射模,函子 $M\otimes-$使该正合列保持正合.

证明 1)⇔2) 由同调关系 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)^+\cong\mathrm{Ext}_R^1(M,N^+)$;

1) ⇒3) 由题意,M 是 GI_{ac}-内射模,故对任意的 Gorenstein AC -内射模 C,有 $\mathrm{Tor}_1^R(M,C)=0$. 于是对正合列 $0\to A\to B\to C\to0$,其中 C 是 Gorenstein AC-内射模,可以诱导出正合列:$0=\mathrm{Tor}_1^R(M,$

$C)\to M\otimes A\to M\otimes B\to M\otimes C\to 0$. 故 3)成立；

3)⇒1) 设 N 是任意的 Gorenstein AC-内射模，故存在正合列：$0\to K\to P\to N\to 0$，其中 P 是投射模. 对 R-模 M，可诱导出正合列：$0=\mathrm{Tor}_1^R(M,P)\to \mathrm{Tor}_1^R(M,N)\to M\otimes K\to M\otimes P$ 由 3)知，函子 $M\otimes -$ 使第一个正合列保持正合，即 $0\to M\otimes K\to M\otimes P$ 是正合列.

因此，$\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$. 从而 M 是 GI_{ac}- 平坦模.

命题 3　1) 设 R 是环，M 是 GI_{ac}-内射模. 若 M 的 Gorenstein AC-内射维数小于等于 1，则 M 是内射模；

2) 设 R 是环，M 是 GI_{ac}-平坦模. 若 M 的 Gorenstein AC-平坦维数小于等于 1，则 M 是平坦模.

证明　1) 设 M 是 GI_{ac}-内射模，由于 M 的 Gorenstein AC-内射维数小于等于 1，故存在正合列：$0\to M\to E\to M'\to 0$，其中 E 是内射模，M' 是 Gorenstein AC-内射模. 于是有 $\mathrm{Ext}_R^1(M',M)=0$，该正合列可裂，从而有 M 是内射模.

2) 设 M 是 GI_{ac}-平坦模，则 M^+ 是 GI_{ac}-内射模，于是有 M^+ 的 Gorenstein AC-内射维数小于等于 1. 由 1)知，M^+ 是内射模，故 M 是平坦模.

称 R-模 M 是强 GI_{ac}-内射模，若对任意的 Gorenstein AC-内射模 N 及任意正整数 i，都有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$；称 R-模 M 是强 GI_{ac}-平坦模，若对任意的 Gorenstein AC-内射模 N 及任意正整数 i，都有 $\mathrm{Tor}_i^R(N,M)=0$. 环 R 称为半单环，是指每个 R-模是投射模或内射模. 下面用 GI_{ac}-内射模刻画半单环：

定理 1　设 R 是环，以下各条等价：

1) 每个 R-模是 GI_{ac}-内射模；

2) 每个 R-模是强 GI_{ac}-内射模；

3) 每个 Gorenstein AC-内射模是投射模；

4) 每个 Gorenstein AC-投射模是内射模；

5) R 是半单环.

证明　1)⇒3) 设 M 是 Gorenstein AC-内射模. 对任意的 R-模 N，由 1)知，N 是 GI_{ac}-内射模，从而 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 因此，M 是投射模.

3)⇒2) 设 M 是 R-模，N 是 Gorenstein AC-内射模. 由 3)知，N 是投射模，故对任意正整数 i，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$，因而 M 是强 GI_{ac}-内射模.

2)⇒1) 显然.

4)⇒5) 设 M 是投射模，由定义知，M 也是 Gorenstein AC-投射模. 由 4)知，M 是内射模，故 R 是 QF 环，于是每个 R-模 N 都是 Gorenstein 投射模. 注意此时 R 是 QF 环，故由注 1 知，Gorenstein 投射模等价于 Gorenstein AC-投射模，再由 4)知，N 是内射模. 因此，R 是半单环.

5)⇒4) 显然.

3)⇒5) 设 M 是内射模，N 是任意的 R-模. 由定义 1 知，M 也是 Gorenstein AC-内射模. 由 3)知，M 是投射模，故 R 是 QF 环，于是每个 R-模 N 是 Gorenstein 内射模. 注意此时 R 是 Noether 环，故由注 1 知，Gorenstein 内射模等价于 Gorenstein AC-内射模，于是又由 3)知，N 是 Gorenstein AC-内射模，从而也是投射模. 因此，R 是半单环.

5)⇒3) 显然.

称环 R 是 von Neumann 正则环，是指每个 R-模是平坦模或 FP-内射模；环 R 是 IF 环，是指每个内射模是平坦模. Ding 等[16]证明了 IF 环就是 FC 环. 环 R 是 FC 环，是指 R 是自 FP-内射的凝聚环. 下面用 GI_{ac}-平坦模刻画 von Neumann 正则环：

定理 2　设 R 是环，以下各条等价：

1) 每个 R-模是 GI_{ac}-平坦模；

2) 每个 R-模是强 GI_{ac}-平坦模；

3) 每个 Gorenstein AC-内射模是平坦模；

4) 每个余挠模是 GI_{ac}-内射模；

5) 每个纯内射模是 GI_{ac}-内射模；

6) R 是 von Neumann 正则环.

证明　1)⇒2) 由注 1 及定理 1.

2)⇒3) 设 M 是 R-模，N 是 Gorenstein AC-内射模. 由 2)知，M 是强 GI_{ac}-平坦模. 于是对任意正整数 i，有 $\mathrm{Tor}_i^R(N,M)=0$，故 N 是平坦模.

3)⇒4) 设 M 是余挠模，N 是 Gorenstein AC-内射模. 由 3)知，N 是平坦模，故 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$，从而 M 是 GI_{ac}-内射模.

4)⇒5) 由于每个纯内射模是余挠模，故 5)成立.

5)⇒3) 设 N 是 Gorenstein AC-内射模，M 是任意的 R-模，故 M^+ 是纯内射模. 由 5)知，M^+ 是 GI_{ac}-内射模，于是对任意的 Gorenstein AC-内射模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M^+)=0$. 另一方面，由同构关系 $\mathrm{Tor}_1^R(N.M)^+\cong \mathrm{Ext}_R^1(N,M^+)=0$，故 N 是平坦模.

3)⇒2) 设 N 是 Gorenstein AC-内射模，M 是任意的 R-模. 由 3)知，N 是平坦模，故对任意的正整数 i，有 $\mathrm{Tor}_i^R(N,M)=0$，从而 M 是强 GI_{ac}-平坦模.

2)⇒1) 显然.

3)⇒6) 设 E 是内射模,由定义 1 知,E 也是 Gorenstein AC-内射模. 由 3)知,E 是平坦模,故 R 是 IF 环,从而是 FC 环,于是每个 R-模 M 是 Gorenstein-平坦模. 注意此时 R 是凝聚环,故由注 1 知,M 也是 Gorenstein AC 平坦模,从而有 M^+ 是 Gorenstein AC-内射模. 再由 3)知,M^+ 是平坦模,故 M 是 FP-内射模. 因此,R 是 von Neumann 正则环.

6)⇒1) 由于每个平坦模是 GI_{ac}-平坦模,故 1)成立.

模的 GI-内射维数、DI-内射维数、GI-平坦维数和 DI-平坦维数的定义分别见文献[3-5]. 类似地,现定义模的 GI_{ac}-内射维数和 GI_{ac}-平坦维数:

定义 2 设 M 是 R-模:

1) M 的 GI_{ac}-内射维数定义为 $GI_{ac}\text{-id}_R M=\inf\{n\in N\mid$ 对任意的 Gorenstein AC-内射模 N,都有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(N,M)=0\}$;

2) M 的 GI_{ac}-平坦维数定义为 $GI_{ac}\text{-fd}_R M=\inf\{n\in N\mid$ 对任意的 Gorenstein AC-内射模 N,都有 $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(N,M)=0\}$.

相应地,环 R 的 GI_{ac}-整体维数 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)$ 以及 GI_{ac}-弱整体维数 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)$ 定义为

3) $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)=\sup\{GI_{ac}\text{-id}_R M\mid M$ 是任意的 R-模$\}$;

4) $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)=\sup\{GI_{ac}\text{-fd}_R M\mid M$ 是任意的 R-模$\}$.

注 2 由上述定理容易看到,环 R 的 GI_{ac}-整体维数刻画了环 R 与半单环的距离,即 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)=0$ 当且仅当 R 是半单环;环 R 的 GI_{ac}-弱整体维数刻画了环 R 与 von Neumann 正则环的距离,即 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)=0$ 当且仅当 R 是 von Neumann 正则环.

命题 4 设 M 是 R-模,若 $\mathrm{id}_R M<\infty$ 则 $G_{ac}-\mathrm{id}_R M=\mathrm{id}_R M$. 因此,当 $\mathrm{D}(R)<\infty$ 时,$GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)=\mathrm{D}(R)$.

证明 由于内射模是 GI_{ac}-内射模,故 $GI_{ac}-\mathrm{id}_R M\leqslant\mathrm{id}_R M$. 现设 $\mathrm{id}_R M=n<\infty$,证 $GI_{ac}-\mathrm{id}_R M\geqslant n$. 设 N 是任意的 R-模,故存在正合列:$0\to N\to E\to L\to 0$,其中 E 是内射模. 由于 $\mathrm{id}_R M=n<\infty$,故又存在正合列:$\mathrm{Ext}_R^n(E,M)\to\mathrm{Ext}_R^n(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(L,M)=0$.

由于 $\mathrm{Ext}_R^n(N,M)\neq 0$,(否则 $\mathrm{id}_R M<n$,这与假设矛盾),故 $\mathrm{Ext}_R^n(E,M)\neq 0$. 注意到 E 是内射模,从而也是 GI_{ac}-内射模,故有 $GI_{ac}-\mathrm{id}_R M\geqslant n$.

定理 3 设 R 是环,以下各条等价:

1) $GI_{ac}-i\mathrm{D}(R)\leqslant 1$;

2) Gorenstein AC-内射模的投射维数小于等于 1;

3) 强 GI_{ac}-内射模的商模是强 GI_{ac}-内射模;

4) 内射模的商模是强 GI_{ac}-内射模;

5) GI_{ac}-内射模的商模是 GI_{ac}-内射模;

6) 内射模的商模是 GI_{ac}-内射模.

证明 1)⇒2) 设 M 是 R-模,由 1)知,对任意的 Gorenstein AC-内射模 N,都有 $GI_{ac}\text{-id}_R M\leqslant 1$,故 $\mathrm{Ext}_R^2(N,M)=0$,因而 2)成立;

2)⇒1) 设 M 是 R-模,N 是 Gorenstein AC-内射模. 由 2)知,$\mathrm{Ext}_R^2(N,M)=0$,于是有 $GI_{ac}\text{-id}_R M\leqslant 1$.

3)⇒4) 显然.

4)⇒3) 设 M 是强 GI_{ac}-内射模,L 是 M 的商模,于是存在正合列:$0\to K\to M\to L\to 0$. 另一方面,又存在正合列:$0\to K\to E\to C\to 0$,其中 E 是内射模. 于是存在以下正合列的交换图如图 1 所示.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

由 4)知,C 是强 GI_{ac}-内射模. 对中间列的正合列,由于 M,C 是强 GI_{ac}-内射模,故 Q 也是强 GI_{ac}-内射模. 对中间行正合列:$0\to E\to Q\to L\to 0$,由于 E 是内射模,Q 是强 GI_{ac}-内射模,故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N 及任意正整数 i,有 $0=\mathrm{Ext}_R^i(N,Q)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,E)=0$. 因此,$\mathrm{Ext}_R^i(N,L)=0$,即 L 是强 GI_{ac}-内射模.

1)⇒4) 设 E 是内射模,L 是 E 的商模,于是存在正合列:$0\to K\to E\to L\to 0$. 由于 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$,故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N 有 $\mathrm{Ext}_R^2(N,K)=0$. 另一方面,又存在正合列:$0\to L\to E_1\to L_1\to 0$,其中 E_1 是内射模. 由于 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$,又可以得到 $\mathrm{Ext}_R^2(N,L)=0$. 由第一个正合列及维数提升定理知,$\mathrm{Ext}_R^3(N,K)\cong\mathrm{Ext}_R^2(N,L)=0$. 重复上述过程,对任意正整数 i 都有 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,K)=0$. 于是又存在正合列:$0=\mathrm{Ext}_R^i(N,E)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,K)=0$. 因此,$\mathrm{Ext}_R^i(N,L)=0$,即 L 是强 GI_{ac}-内射模.

4)⇒1) 设 M 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to M\to E\to E/M\to 0$，其中 E 是内射模. 由 4)知，E/M 是强 GI_{ac}-内射模，故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N 及任意正整数 i，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,E/M)=0$. 于是又存在正合列：$0=\mathrm{Ext}_R^i(N,E/M)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,E)=0$. 因而对任意正整数 i 都有 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,M)=0$，于是有 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$.

2)⇒5) 设 M 是 GI_{ac}-内射模，L 是 M 的商模，于是存在正合列：$0\to K\to M\to L\to 0$. 故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N，有正合列：$0=\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,L)\to\mathrm{Ext}_R^2(N,K)$. 由 2)知，$\mathrm{pd}_R N\leqslant 1$，故 $\mathrm{Ext}_R^2(N,K)=0$. 因此，$\mathrm{Ext}_R^1(N,L)=0$，L 是 GI_{ac}-内射模.

5)⇒6) 显然.

6)⇒2) 设 M 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to M\to E\to E/M\to 0$，其中 E 是内射模. 由 6)知，E/M 是 GI_{ac}-内射模，故对任意的 Gorenstein AC-内射模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,E/M)=0$. 于是又存在正合列：$0=\mathrm{Ext}_R^1(N,E/M)\to\mathrm{Ext}_R^2(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^2(N,E)=0$. 因而有 $\mathrm{Ext}_R^2(N,M)=0$，故 2)成立.

环 R 称为遗传环，是指 $\mathrm{D}(R)\leqslant 1$；环 R 称为半遗传环，是指 R 是凝聚环，且 $w\mathrm{D}(R)\leqslant 1$. 现用环 R 的 GI_{ac}-内射维数刻画遗传环：

定理 4　环 R 是遗传环当且仅当 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$，且每个 GI_{ac}-内射模是内射模.

证明　⇒ 由于 R 是遗传环，故 $\mathrm{D}(R)\leqslant 1$. 由命题 4 知，$GI_{ac}-\mathrm{D}(R)\leqslant\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$. 现设 M 是 GI_{ac}-内射模，N 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to N\to E\to E/N\to 0$ 其中 E 是内射模. 又存在正合列：$0=\mathrm{Ext}_R^1(E,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^2(E/N,M)=0$，从而 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$，即 M 是内射模.

⇐ 设 M 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to N\to E\to E/N\to 0$，其中 E 是内射模. 由于 E 也是 GI_{ac}-内射模，且 $GI_{ac}-\mathrm{iD}(R)\leqslant 1$，故 E/N 也是 GI_{ac}-内射模. 由题意知，E/N 是内射模，故 $\mathrm{D}(R)\leqslant 1$，从而 R 是遗传环.

最后，用环 R 的 GI_{ac}- 平坦维数刻画半遗传环：

定理 5　设 R 是凝聚环，则 R 是半遗传环当且仅当 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)\leqslant 1$，且每个 GI_{ac}-平坦模是平坦模.

证明　⇒ 由于 R 是半遗传环，故 $w\mathrm{D}(R)\leqslant 1$. 由命题 4 知，$GI_{ac}$-$\mathrm{fD}(R)\leqslant w\mathrm{D}(R)\leqslant 1$. 现设 M 是 GI_{ac}- 平坦模，N 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to N\to E\to E/N\to 0$，其中 E 是内射模. 于是又存在正合列：$0=\mathrm{Tor}_2^R(M,E/N)\to\mathrm{Tor}_1^R(M,N)\to\mathrm{Tor}_1^R(M,E)=0$. 从而 $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$，即 M 是平坦模.

⇐ 设 M 是任意的 R-模，故存在正合列：$0\to K\to F\to M\to 0$，其中 F 是平坦模. 由于 F 也是 GI_{ac}-平坦模，且 $GI_{ac}-\mathrm{fD}(R)\leqslant 1$，故 K 也是 GI_{ac}-平坦模，由题意知，K 是平坦模，故 $w\mathrm{D}(R)\leqslant 1$，从而 R 是半遗传环.

参考文献：

[1] GAO Z H. On GI-injective Modules [J]. Communications in Algebra，2012，40(10)：3841-3858.

[2] GAO Z H. On GI-flat modules and dimensions [J]. Journal of the Korean Mathematical Society，2013，50(1)：203-218.

[3] PAN Q，ZHU X. GP-projective and GI- injective modules [J]. Mathematical Notes，2012，91(5/6)：824-832.

[4] 王修建，赵玉娥，杜先能. 关于 GI-平坦模和 GF-挠模 [J]. 中国科学技术大学学报，2015，45(3)：193-198.

[5] ZHAO T，XU Y. On right orthogonal classes and cohomology over ding-chen rings [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2017，40(2)：617-634.

[6] BRAVO D，GILLESPIE J. Absolutely clean，level，and Gorenstein AC-injective complexes [J]. Communications in Algebra，2014，44(5)：2213-2233.

[7] BRAVO D，PEREA M. Finiteness conditions and cotorsion pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2017，221(6)：1249-1267.

[8] JAMES G. AC-Gorenstein rings and their stable categories [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，2019，107(2)：181-198.

[9] BRAVO D，GILLESPIE J，HOVEY M. The stable module category of a general ring [J/OL]. Cornell University Library. [2014-05-22]. http://arxiv. org/pdf/1405. 5768v1. pdf.

[10] BRAVO D，ESTRADA S，IACOB A. FP_n-injective，FP_n-flat covers and preenvelopes，and Gorenstein AC-flat covers [J]. Algebra Colloquium，2018，25(2)：319-334.

[11] GAO Z，WANG F. Weak injective and weak flat modules [J]. Communications in Algebra，2015，43(9)：3857-3868.

[12] GAO Z，HUANG Z. Weak injective covers and dimension of modules [J]. Acta Mathematica Hungarica，2015，147(1)：135-157.

[13] ZHAO T. Homological properties of modules with finite weak injective and weak flat dimensions [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2017，41(2)：1-27.

[14] 陈　东，熊　涛. 关于 Gorenstein AC-余挠模 [J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2020，44(5)：35-40.

[15] BENNIS D，MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective，injective，and flat modules [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2007，210(2)：437-445.

[16] DING N，CHEN J. The flat dimensions of injective modules [J]. Manuscripta Math，1993，78(1)：165-177.