第48卷 第3期 兰州理工大学学报 Vol. 48 No. 3
2022年6月 Journal of Lanzhou University of Technology Jun. 2022

文章编号：1673-5196(2022)03-0169-04

对偶 τ-Rickart 模

李煜彦*，何东林

（陇南师范高等专科学校 数信学院，甘肃 陇南 742500）

摘要：设 $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ 表示遗传挠理论，引入了对偶 τ-Rickart 模的概念. 称 M 是对偶 τ-Rickart 模，如果对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\pi_{\tau}^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})=\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)$ 是 M 的直和因子. 研究了对偶 τ-Rickart 模的性质，给出了对偶 τ-Rickart 模的等价刻画. 进而，证明了 M 是 τ-Rickart 模并且 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 具有 C_2 条件当且仅当 M 是对偶 τ-Rickart 模并且 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 具有 D_2 条件.

关键词：对偶 τ-Rickart 模；τ-Rickart 模；直和因子

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A

Dual τ-Rickart modules

LI Yu-yan, HE Dong-lin

(College of Mathematics and Information Sciences, Longnan Teachers College, Longnan 742500, China)

Abstract: Let $\tau=(\mathscr{T},\mathscr{F})$ be a hereditary torsion theory, the concept of dual τ-Rickart module is introduced. A module M is called dual τ-Rickart if $\pi_{\tau}^{-1}(\mathrm{Im}\ \bar{\psi})=\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)$ is a direct summand of M for every $\psi\in\mathrm{End}(M)$. Properties of dual τ-Rickart module are studied, some equivalent characterizations to be dual τ-Rickart are given. Moreover, it is proved that M is τ-Rickart and $M/(\tau(M))$ has C_2 condition if and only if M is dual τ-Rickart and $M/(\tau(M))$ has D_2 condition.

Key words: dual τ-Rickart module; τ-Rickart module; direct summand

Rickart 环是 Baer 环的一个重要的推广，其相关理论已经成为环论中的经典内容[1]. Rizvi 和 Roman[2]将 Baer 性质从环推广到模，得到了 Baer 模与 extending 模之间的紧密联系，同时还证明了 Baer 模的自同态环是 Baer 环. 随后，Rizvi 和 Roman[3]刻画了半准素遗传环，使得这类环上的投射模是 Baer 模. 作为 Baer 模的推广，Lee 等[4]和 Agayev 等[5]引入了模的 Rickart 性质，证明了 Rickart 模的自同态环是 Rickart 环，以及 R 是半遗传环当且仅当任意 R-模是 Rickart 模. 2011 年，Lee 等[6]提出了对偶 Rickart 模的概念，并利用模的对偶 Rickart 性质刻画了半单环、Von Neumann 正则环和右遗传环. 2011 及 2015 年，Asgari 等[7-8]利用第二奇异子模的研究方法引入了 t-本质子模，并借助 t-本质子模相继提出并研究了 t-extending 模，t-Rickart 模和对偶 t-Rickart 模. 此后，许多作者[9-12]对 Rickart 模及其相关问题进行了更加广泛的研究，得到了一些有意义的结论. 2020 年，李煜彦等[13-14]从遗传挠理论的角度引入了 τ-Rickart 模，它是 t-Rickart 模的推广，文中举例说明了 τ-Rickart 模和 Rickart 模没有相互蕴含关系. 本文引入了对偶 τ-Rickart 模的概念，研究了对偶 τ-Rickart 模的性质，给出了对偶 τ-Rickart 模的等价刻画，证明了 M 是 τ-Rickart 模并且 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 具有 C_2 条件当且仅当 M 是对偶 τ-Rickart 模并且 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 具有 D_2 条件. 本文中的环都是有单位元的结合环，模指酉右 R-模，挠理论均指遗传挠理论. 用 $\tau(M)$ 表示 M 的所有 τ-挠子模的和. 其他与挠理论有关的相关概念参见文献[9]. 设 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，令 $\tau_M(\psi)=\{m\in M\mid\psi(m)\in$

收稿日期：2020-12-24

基金项目：甘肃省高等学校创新能力提升项目(2019B-224)，甘肃省高等学校创新基金(2020A-277，2021B-364)

通讯作者：李煜彦(1983-)，男，甘肃西和人，硕士，讲师. Email：nwnulyy@126.com

$\tau(M)\}$，$\bar{\psi}:M\to\dfrac{M}{\tau(M)}$（$\bar{\psi}(m)=\psi(m)+\tau(M)$，$\forall m\in M$），以及 $\pi_\tau:M\to\dfrac{M}{\tau(M)}$（$\pi_\tau(m)=m+\tau(M)$，$\forall m\in M$），显然 $\bar{\psi},\pi_\tau\in\mathrm{Hom}\left(M,\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$.

1 预备知识

定义 1[14] 称 M 是 τ-Rickart 模，如果对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\tau_M(\psi)$是 M 的直和因子.

定义 2[6] 称 M 是对偶 Rickart 模，如果对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\mathrm{Im}\ \psi=\psi(M)$是 M 的直和因子.

定义 3 称 M 是对偶 τ-Rickart 模，如果对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\ \bar{\psi})=\mathrm{Im}\ \psi+\tau(M)$是 M 的直和因子. 称 R 是对偶 τ-Rickart 环，如果 R_R 是对偶 τ-Rickart 模.

引理 1[13] τ-Rickart 模的直和因子是 τ-Rickart 模.

引理 2[13-14] 设 M 是模，则下列条件等价：

1) M 是 τ-Rickart 模；

2) $M=\tau(M)\oplus M'$，其中 M' 是（τ-挠自由）Rickart 模；

3) 对任意 $f\in\mathrm{End}(M)$，$f^{-1}(\tau(M))$是 M 的直和因子；

4) 对任意 $f\in\mathrm{End}(M)$，短正合序列 $0\to\tau_M(f)\to M\to\dfrac{M}{\tau_M(f)}\to 0$ 是可裂的.

引理 3[4] 设 M 是模，$S=\mathrm{End}(M)$. 则下列条件等价：

1) M 是具有 C_2 条件的 Rickart 模；

2) S 是 von Neumann 正则环；

3) 对任意 $\varphi\in S$，$\mathrm{Ker}\ \varphi$ 和 $\mathrm{Im}\ \varphi$ 是 M 的直和因子.

2 主要结论

命题 1 设 M 是模，则以下结论成立：

1) 若 M 是 τ-挠自由模，则 M 是对偶 τ-Rickart 模当且仅当 M 是对偶 Rickart 模；

2) 若 M 是非奇异模，则 M 是对偶 t-Rickart 模当且仅当 M 是对偶 Rickart 模；

3) 若 M 是 τ-挠自由且非奇异模，则 M 是对偶 τ-Rickart 模当且仅当 M 是对偶 t-Rickart 模当且仅当 M 是对偶 Rickart 模.

证明 显然.

由文献[13-15]知，直和因子包含 $\tau(M)$的 τ-Rickart 模和 τ-Baer 模分别具有 SIP 性质和强 SIP 性质. 对偶地，直和因子包含 $\tau(M)$的对偶 τ-Rickart 模，下面结论成立.

命题 2 设 M 是模，N_1，N_2 是 M 的且包含 $\tau(M)$直和因子. 若 M 是对偶 τ-Rickart 模，则 N_1+N_2 是 M 的直和因子.

证明 设 N_1，N_2 是 M 的直和因子，则存在 $e_i^2=e_i\in\mathrm{End}(M)$，使得 $N_i=eM_i$（$i=1,2$）. 易知 $N_1+N_2=e_1M\oplus(1-e_1)e_2M$. 由于 $\tau(M)\subseteq e_iM$，以及 M 是对偶 τ-Rickart 模，故$(1-e_1)e_2M$ 是 τ-挠自由的，且$(1-e_1)e_2M\oplus\tau(M)$是 M 的直和因子. 于是存在 $f^2=f\in\mathrm{End}(M)$，使得$(1-e_1)e_2M=fM$. 显然 $e_1f=0$，因此

$$N_1+N_2=e_1M\oplus(1-e_1)e_2M=e_1M\oplus fM=(e_1+f-e_1f)M$$

从而 N_1+N_2 是 M 的直和因子.

下面结论说明对偶 τ-Rickart 模保持直和因子.

定理 1 设 M 是模，L 是 M 的直和因子. 若 M 是对偶 τ-Rickart 模，则 L 是对偶 τ-Rickart 模.

证明 设 $M=L\oplus L'$，$\psi\in\mathrm{End}(L)$. 令 $\phi=\psi\oplus 1_{L'}$，其中 $1_{L'}$是 L' 上的恒等自同态，则 $\phi\in\mathrm{End}(M)$. 因为 $\tau(M)=\tau(L)\oplus\tau(L')$，所以 $\mathrm{Im}\ \phi+\tau(M)=(\mathrm{Im}\ \phi+L')+(\tau(L)\oplus\tau(L'))=(\mathrm{Im}\ \phi+\tau(L))\oplus L'$. 由于 M 是对偶 τ-Rickart 模，故存在 $N\leqslant M$，使得 $M=(\mathrm{Im}\ \phi+\tau(L))\oplus L'\oplus N$. 于是 $L=(\mathrm{Im}\ \phi+\tau(L))\oplus[(L'\oplus N)\cap L)]$，即 $\mathrm{Im}\ \phi+\tau(L)$是 L 的直和因子. 从而 L 是对偶 τ-Rickart 模.

由定理 1，易得如下两个推论.

推论 1 R 是对偶 τ-Rickart 环当且仅当每个循环投射 R-模是对偶 τ-Rickart 模.

证明 充分性）显然.

必要性）设 R 是对偶 τ-Rickart 环，M 是循环投射 R-模. 则存在 R 的理想 J，使得 J 是 R 的直和因子，且 $M\cong J$. 由定理 1 知，J 是对偶 τ-Rickart 模，因此 M 是对偶 τ-Rickart 模.

推论 2 设 R 是环，考虑以下条件：

1) 每个自由 R-模是对偶 τ-Rickart 模；

2) 每个投射 R-模是对偶 τ-Rickart 模；

3) 每个平坦 R-模是对偶 τ-Rickart 模.

则 3)$\Rightarrow$2)$\Leftrightarrow$1). 当任意 R-模是有限表示模时，2)$\Rightarrow$3).

证明 因为自由模都是投射的，且投射模都是平坦的，所以 3)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$1)成立.

1)$\Rightarrow$2) 设 M 是投射模，则存在自由模 F，使得 M 是 F 的直和因子. 由 1)知，F 是对偶 τ-Rickart

模，故由定理 1 知，M 是对偶 τ-Rickart 模.

2)⇒3) 因为有限表示平坦模是投射的，故结论成立.

下面给出对偶 τ-Rickart 模的等价刻画.

定理 2　设 M 是模，则下列条件等价：

1) M 是对偶 τ-Rickart 模；

2) 存在 $W\leqslant M$，使得 $M=\tau(M)\oplus W$，其中 W 是(τ-挠自由)对偶 Rickart 模；

3) 对于每个 $\mathrm{End}(M)$ 的有限子集 Λ，$\sum\limits_{\psi\in\Lambda}\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})$ 是 M 的直和因子；

4) 对于每个 $\mathrm{End}(M)$ 的有限生成右理想 I，$\sum\limits_{\psi\in I}\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})$ 是 M 的直和因子；

5) 对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，短正合序列

$$0\longrightarrow\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})\xrightarrow{\iota}M\xrightarrow{\pi}\frac{M}{\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})}\longrightarrow 0$$

是可裂的，其中 ι 和 π 分别是包含同态和自然满同态.

证明　1)⇒2) 设 M 是对偶 τ-Rickart 模，0 是 M 上的零同态. 则 $\tau(M)=\mathrm{Im}\ 0+\tau(M)$ 是 M 的直和因子. 于是存在 $W\leqslant M$，使得 $M=\tau(M)\oplus W$，易知 W 是 τ-挠自由的，由命题 1 和定理 1 知，W 是对偶 Rickart 模.

2)⇒1) 设 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\iota:W\to M$ 是包含同态，$\pi:M\to W$ 是标准投射. 则

$$\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)=\mathrm{Im}(\pi\psi\iota)+\tau(M)$$

因为 W 是对偶 Rickart 模，所以 $\mathrm{Im}(\pi\psi\iota)$ 是 W 的直和因子. 因此 $\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)$ 是 M 的直和因子，从而 M 是对偶 τ-Rickart 模.

1)⇒3) 由命题 2 得证.

3)⇒4) 设 I 是 $\mathrm{End}(M)$ 的有限生成右理想，则存在 $\psi_i\in\mathrm{End}(M)(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$I=\sum_{i=1}^n\psi_i\mathrm{End}(M)$$

于是

$$\sum_{\psi\in I}\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})=\sum_{i=1}^n\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\overline{\psi_i})$$

由 3) 知，$\sum\limits_{\psi\in I}\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})$ 是 M 的直和因子.

4)⇒1) 设 $\phi\in\mathrm{End}(M)$，$I=\phi\mathrm{End}(M)$. 则

$$\sum_{\psi\in I}\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})=\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\phi})$$

由 4)知，$\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\phi})$ 是 M 的直和因子. 因此 M 是对偶 τ-Rickart 模.

1)⇔5) 对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，短正合序列

$$0\longrightarrow\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})\xrightarrow{\iota}M\xrightarrow{\pi}\frac{M}{\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})}\longrightarrow 0$$

可裂当且仅当对任意 $\psi\in\mathrm{End}(M)$，$\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})=\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)$ 是 M 的直和因子当且仅当 M 是对偶 τ-Rickart 模.

推论 3　若环 R 是半单的，则任意 R-模 M 都是对偶 τ-Rickart 模，且其 τ-挠子模 $\tau(M)$ 是投射的.

证明　设 $\psi\in\mathrm{End}(M)$. 因为 R 是半单的，所以 $\tau(M)$ 是投射的，且短正合序列

$$0\longrightarrow\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})\xrightarrow{\iota}M\xrightarrow{\pi}\frac{M}{\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})}\longrightarrow 0$$

可裂. 由定理 2 知，M 是对偶 τ-Rickart 模.

命题 3　设 M 是模. 若 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是投射的，则 M 是对偶 τ-Rickart 模当且仅当 $\mathrm{End}\left(\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环.

证明　必要性) 设 M 是对偶 τ-Rickart 模，$\psi\in\mathrm{End}(M)$. 则 $\pi_\tau^{-1}(\mathrm{Im}\,\bar{\psi})=\mathrm{Im}\,\psi+\tau(M)$ 是 M 的直和因子，故 $\mathrm{Im}\,\bar{\psi}$ 是 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 的直和因子. 因为 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是投射的，所以 $\mathrm{Im}\,\bar{\psi}$ 是投射的. 而 $\dfrac{M}{\mathrm{Ker}\,\bar{\psi}}\cong\mathrm{Im}\,\bar{\psi}$，于是 $\mathrm{Ker}\,\bar{\psi}$ 是 M 的直和因子，因此 M 是 τ-Rickart 模. 由引理 2 和定理 2 知，$\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是 Rickart 模和对偶 Rickart 模. 从而由引理 3 知，$\mathrm{End}\left(\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环.

充分性) 设 $\mathrm{End}\left(\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环，则由引理 3 知，$\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是对偶 Rickart 模. 由于 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是投射的，故 $\tau(M)$ 是 M 的直和因子. 于是由定理 2 知，M 是对偶 τ-Rickart 模.

推论 4　设 M 是投射模. 则 M 是对偶 τ-Rickart 模当且仅当 M 是 τ-Rickart 模且 $\mathrm{End}\left(\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环.

证明　必要性) 设 M 是对偶 τ-Rickart 模，则由定理 2 知，$\tau(M)$ 是 M 的直和因子. 于是由命题 3 知，$\mathrm{End}\left(\dfrac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环，因此 $\dfrac{M}{\tau(M)}$ 是 Rickart 模. 由文献[13-14]知，M 是 τ-Rickart 模.

充分性）设 M 是 τ-Rickart 模，则 $\tau(M)$ 是 M 的直和因子. 又因为 $\mathrm{End}\left(\frac{M}{\tau(M)}\right)$ 是 von Neumann 正则环，所以由命题 3 知，M 是对偶 τ-Rickart 模.

称模 M 满足 C_2 条件，如果对任意 $L\leqslant M$，若 L 与 M 的某个直和因子同构，则 L 是 M 的直和因子. 称模 M 满足 D_2 条件，如果对任意 $L\leqslant M$，若 $\frac{M}{L}$ 与 M 的某个直和因子同构，则 L 是 M 的直和因子.

引理 4[4] M 是 Rickart 模当且仅当 M 具有 D_2 条件并且对任意 $\varphi\in\mathrm{End}(M)$，$\mathrm{Im}\ \varphi$ 同构于 M 的某个直和因子.

引理 5[6] M 是对偶 Rickart 模当且仅当 M 具有 C_2 条件并且对任意 $\varphi\in\mathrm{End}(M)$，$\mathrm{Im}\ \varphi$ 同构于 M 的某个直和因子.

由模的 C_2 条件和 D_2 条件可知，τ-Rickart 模和对偶 τ-Rickart 模之间有如下联系.

定理 3 设 M 是模. 则 M 是 τ-Rickart 模并且 $\frac{M}{\tau(M)}$ 具有 C_2 条件当且仅当 M 是对偶 τ-Rickart 模并且 $\frac{M}{\tau(M)}$ 具有 D_2 条件.

证明 必要性）设 M 是 τ-Rickart 模，则由引理 2 知，$M=\tau(M)\oplus M'$，其中 M' 是（τ-挠自由）Rickart 模. 由引理 4 知，$M'\cong\frac{M}{\tau(M)}$ 具有 D_2 条件. 设 $\psi\in\mathrm{End}(M')$，则 $\mathrm{Ker}\ \psi$ 是 M' 的直和因子. 由于 $\frac{M'}{\mathrm{Ker}\ \psi}\cong\mathrm{Im}\ \psi$，故 $\mathrm{Im}\ \psi$ 同构于 M' 的某个直和因子. 又因为 $\frac{M}{\tau(M)}$ 具有 C_2 条件，所以 $\mathrm{Im}\ \psi$ 是 M' 的直和因子，因此 M' 是对偶 Rickart 模. 于是由定理 2 知，M 是对偶 τ-Rickart 模.

充分性）设 M 是对偶 τ-Rickart 模，则由定理 2 知，$M=\tau(M)\oplus M'$，其中 M' 是（τ-挠自由）对偶 Rickart 模. 由引理 5 知，$\frac{M}{\tau(M)}$ 具有 C_2 条件. 与必要性类似的证明过程可证，M 是 τ-Rickart 模.

参考文献：

[1] LAM T Y. Lectures on modules and rings [M]. New York: Springer, 1999.

[2] RIZVI S T, ROMAN C S. Baer and quasi-Baer modules [J]. Comm Algebra, 2004, 32(1): 103-123.

[3] RIZVI S T, ROMAN C S. On direct sums of Baer modules [J]. J Algebra, 2009, 321(2): 682-696.

[4] LEE G, RIZVI S T, ROMAN C S. Rickart modules [J]. Comm Algebra, 2010, 38(11): 4005-4027.

[5] AGAYEV N, HALICIOGLU S, HARMANCI A. On Rickart modules [J]. Bull Iran Math Soc, 2012, 38(2): 433-445.

[6] LEE G, RIZVI S T, ROMAN C S. Dual Rickart modules [J]. Comm Algebra, 2011, 39(11): 4036-4058.

[7] ASGARI S H, HAGHANY A. t-extending modules and t-Baer modules [J]. Comm Algebra, 2011, 39(5): 1605-1623.

[8] ASGARI S H, HAGHANY A. t-Rickart and dual t-Rickart modules [J]. Algebra Colloq, 2015, 22(1): 849-870.

[9] ÇEKEN S, ALKAN M. Singular and nonsingular modules relative to a torsion theory [J]. Comm Algebra, 2017, 45(8): 3377-3389.

[10] UNGOR B, HALICIOGLU S, HARMANCI A. Rickart modules relative to singular submodule and dual Goldie torsion theory [J]. Journal Algebra Appl, 2016, 15(8): 1-8.

[11] ABDELWHAB T, YANG X Y. Modules whose endomorphism rings are right rickart [J]. Asian J Math, 2019, 13(2): 1-14.

[12] HAZRAT R, VAŠ L. Baer and Baer *-ring characterizations of Leavitt path algebras [J]. J Pure Appl Algebra, 2018, 17(1): 39-60.

[13] 李煜彦，王奇临. 相关于遗传挠理论的 Rickart 模 [J]. 湖北民族大学学报（自然科学版），2020，38(3)：241-244.

[14] 李煜彦，何东林. τ-Rickart 模和相对 τ-Rickart 模 [J]. 西北师范大学学报（自然科学版），2020，56(6)：1-4.

[15] 李煜彦，王胜青. 相关于挠理论的 Baer 模 [J]. 汕头大学学报（自然科学版），2020，35(4)：21-26.