文章编号：1673-5196(2022)04-0144-08

三角矩阵环上 FC-投射模的刻画

吴德军*，付家慧

（兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050）

摘要：设 $T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环，其中 A，B 是环，U 是 (B,A)-双模. 给出了有限余生成左 T-模和有限余表示左 T-模在形式三角矩阵环上的等价刻画，进而给出了形式三角矩阵环 T 上 FC-投射左 T-模的刻画. 作为应用，讨论了左 T-模的 FC-投射维数.

关键词：FC-投射模；余诺特环；FC-投射维数

中图分类号：O154.2 **文献标志码**：A

A characterization of FC-projective modules over triangular matrix rings

WU De-jun，FU Jia-hui

(School of Science，Lanzhou Univ. of Tech.，Lanzhou 730050，China)

Abstract：Let $T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring，where A and B are rings and U is a $(B$，$A)$-bimodule. Equivalent characterizations of left T-modules of finite cogeneration and finite corepresentation on the formal triangular matrix ring are given. Furthermore，a characterization of FC-projective left T-modules over the formal triangular matrix ring is given. As an application，the FC-projective dimensions of left T-modules are discussed.

Key words：FC-projective module；co-noetherian ring；FC-projective dimension

本文中，所有环都是有单位元的结合环，所有模都是酉模. 设 $T=\begin{pmatrix}A & 0\\ U & B\end{pmatrix}$ 是形式三角矩阵环，其中 A，B 是环且 U 是 (B,A)-双模. 本文证明了若 A 是左余诺特环，U_A 是有限生成模，环 B 存在有限余表示的内射余生成子 ${}_BW$，对于任意的 $i\geqslant 1$，$\mathrm{Tor}_i^A(U,X)=0$，则 $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_f$ 是 FC-投射左 T-模当且仅当 X 是 FC-投射左 A-模，Coker f 是 FC-投射左 B-模且 $f:U\otimes_A X\rightarrow Y$ 是单同态.

本文用 FC-$\mathrm{pd}_R M$ 表示左 R-模 M 的 FC-投射维数，FC-$\mathrm{pd}_R M\leqslant n$ 表示对于任意的有限余表示左 R-模 Q，任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+i}(M,Q)=0$. $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ 表示 R-模 X 到 Y 的同态集. 1970 年，Stenström[1]引入了 FP-内射模以及 FP-内射维数的概念并对其性质进行了研究. 2003 年，朱占敏等[2]引入了 FCP-投射模、FCP-投射维数以及余凝聚环的概念并对其性质进行了研究. 证明了如果 R 是右余凝聚环，${}_RM$ 是 FCP-投射模，那么对于任意的正整数 n，任意的有限余表示右 R-模 Q，有 $\mathrm{Ext}_R^n(M,Q)=0$. 2013 年，Xiong 等[3]刻画了三角矩阵 Artin 代数上的 Gorenstein 投射模. 2019 年，Wang 等[4]引入了 Gorenstein FC-投射模并将 FCP-投射模重新命名为 FC-投射模. 还引入了两种新的环，分别是 Gorenstein FC-遗传环、Gorenstein FC-半单环并对其性质进行了研究. 2020 年，Yan 等[5]研究了形式三角矩阵环上的 FP-内射模. 证明了如果 R 是左凝聚环，${}_BU$ 是有限生成投射左 R-模. 那么 $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_f$ 是 FP-内射左 T-模当且仅当 X 是 FP-内射左 A-模，Ker $\widetilde{f}$ 是 FP-内射左 A-模，并且 $\widetilde{f}$ 是满同态. 受以上文献的启发，本文讨论形式三角矩阵环上的 FC-

收稿日期：2021-05-06
基金项目：国家自然科学基金(11761047)
通讯作者：吴德军(1978-)，男，甘肃金昌人，博士，教授.
Email：39666867@qq.com

投射模及其维数.

定义 1[6]　称左 R-模 M 为有限余生成模，如果对于任意单态射 $\varphi: M\to\prod_{\Lambda}U_\lambda$，存在一个有限子集 $E\subset\Lambda$，有 $M\xrightarrow{\varphi}\prod_{\Lambda}U_\lambda\xrightarrow{\pi_E}\prod_{E}U_\lambda$ 的正合列，其中 φ 是单态射，π_E 是满态射.

定义 2[6]　称左 R-模 M 为有限余表示模，如果左 R-模 M 是有限余生成左 R-模，并且对于任意的正合列 $0\to M\to L\to N\to 0$，若 L 是有限余生成模，则 N 是有限余生成模.

引理 1[6]　设 $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 是左 R-模正合列.

1）如果 M_1 和 M_3 是有限余表示左 R-模，那么 M_2 是有限余表示左 R-模.

2）左 R-模的有限直和是有限余表示模当且仅当任意的直和项是有限余表示左 R-模.

定义 3[4]　称左 R-模 M 为 FC-投射模，如果对于任意的有限余表示左 R-模 Q，有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,Q)=0$.

引理 2[7]　环 R 是左余诺特环当且仅当任意的有限余生成左 R-模是有限余表示模.

引理 3[8]　设 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是左 T-模，则

1）$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是内射模当且仅当 Y 是内射左 B-模，$\mathrm{Ker}\,\widetilde{f}$ 是内射左 A-模且 $\widetilde{f}: X\to\mathrm{Hom}_B(U,Y)$ 是满同态.

2）$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是投射模当且仅当 X 是投射左 A-模，$\mathrm{Coker}\,f$ 是投射左 B-模且 $f: U\otimes_A X\to Y$ 是单同态.

引理 4[9]　设 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 和 $\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}_{f'}$ 是左 T-模，$n\geqslant 1$. 则

1）$\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X'\\0\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^n(X,X')$.

2）$\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^n(Y,Y')$.

3）如果对于任意的 $i\geqslant 1$ 有 $\mathrm{Tor}_i^A(U,X)=0$，那么 $\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}X\\U\otimes_A X\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^n(X,X')$.

4）如果对于任意的 $i\geqslant 1$ 有 $\mathrm{Ext}_B^i(U,Y')=0$，那么 $\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,Y')\\Y'\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^n(Y,Y')$.

引理 5　设 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是左 T-模，则

1）$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,Y)\cong\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$.

2）对于任意的 $i\geqslant 0$，如果 ${}_AP$ 是投射左 A-模，那么 $\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^i(U\otimes_A P,Y)$.

3）对于左 B-模 Y，任意的投射左 A-模 P_m，任意的 $i\geqslant 1$，$m\geqslant 0$，如果 $\mathrm{Ext}_B^i(U\otimes_A P_m,Y)=0$，那么对于任意的 $n\geqslant 0$ 有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^n(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

证明　1）定义映射 $\theta: \mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,Y)\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$，对于每个态射 $f: U\otimes_A X\to Y$，令 $\theta(f)$ 为正合列 $0\to\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f\to\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}\to 0$ 的等价类，则 θ 是同构. 故

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,Y)$$

进而由伴随同构知：

$$\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,Y)\cong\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

2）$i=0$ 时，由 1）可知. 下证：$i\geqslant 1$ 时成立. 存在正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}0\\U\otimes_A P\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix}\to 0$$

用 $\mathrm{Hom}_T\left(-,\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$ 作用上正合列，则有长正合列：

$$\mathrm{Ext}_T^i\left(\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^i\left(\begin{pmatrix}0\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$$

因为 P 为投射左 A-模，根据引理 3 知，$\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix}$ 是投射左 T-模，所以

$$\mathrm{Ext}_T^i\left(\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)=0$$

得到

$$\mathrm{Ext}_T^i\left(\begin{pmatrix}0\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$$

又由引理 4 可知：

$$\mathrm{Ext}_T^i\left(\begin{pmatrix}0\\U\otimes_A P\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^i(U\otimes_A P,Y)$$

进而得到

$$\mathrm{Ext}_T^{i+1}\left(\begin{pmatrix}P\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^i(U\otimes_A P,Y)$$

3) $n=0$ 时，由 1)可知. 下证：$n\geqslant 1$ 时成立. 对 X 作投射分解有左 A-模正合列：

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

由 2)和假设可知对于任意的 $n\geqslant 1, m\geqslant 0$，有 $\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_B^n(U\otimes_A P_m, Y)=0$. 下面将 X 的投射分解打断，有正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix}\to 0$$

用 $\mathrm{Hom}_T\left(-,\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$ 作用上正合列，$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_B(U,Y))$ 作用上正合列第一行，则有长正合列：

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to$$

$$\mathrm{Ext}_T^2\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^2\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\cdots$$

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_A(P_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))\to$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\ d_{m+1},\mathrm{Hom}_B(U,Y))\to$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\ d_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))\to$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(P_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))\to\cdots$$

因为 P_m 为投射左 A-模，所以

$$\mathrm{Ext}_A^1(P_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))=0$$

由 1)知：

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_A(P_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong$$
$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\ d_{m+1},\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

进而得到以下交换图 1.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}_T^2\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Hom}_A(P_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}\ d_{m+1},\mathrm{Hom}_B(U,Y)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\ d_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1　交换图

Fig. 1　Commutative diagram

由引理 5 可知：

$$\mathrm{Ext}_T^2\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\ d_m,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

进而有

$$\mathrm{Ext}_T^2\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

所以 $n=1$ 时成立.

当 $n\geqslant 2$ 时，有长正合列：

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to$$

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\to\cdots$$

由 2)和假设可知：

$$\mathrm{Ext}_T^n\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^{n-1}(U\otimes_A P_m,Y)=0$$

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}P_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^{n}(U\otimes_A P_m,Y)=0$$

所以有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_m\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong$$
$$\mathrm{Ext}_T^{n}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{m+1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$$

进而有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_T^{n}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$$

由维数转移可知：

$$\mathrm{Ext}_T^{n}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_T^{2}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{n-1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)$$

因为 $n=1$ 时已证得成立，所以有

$$\mathrm{Ext}_T^{2}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{Coker}\ d_{n-1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\ d_{n-1},\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

又由维数转移可知：

$$\mathrm{Ext}_A^n(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))\cong$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}\ d_{n-1},\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

进而得到了同构式：

$$\mathrm{Ext}_T^{n+1}\left(\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^n(X,\mathrm{Hom}_B(U,Y))$$

命题 1　1) $\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}_\varphi$ 是有限余生成左 T-模当且仅当 Q 是有限余生成左 A-模，P 是有限余生成左 B-模.

2) 若 $\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}_\varphi$ 是有限余表示左 T-模，则 P 是有限

余表示左 B-模.

证明 1）因为 $\binom{Q}{P}_{\varphi}$ 为有限余生成左 T-模，所以由定义 1 知对任意的单同态：$\binom{Q}{P}\to\prod_{\Lambda}\binom{U}{V}_{\lambda}$ 存在正合列：

$$0\to\binom{Q}{P}\to\prod_{\Lambda}\binom{U}{V}_{\lambda}\to\prod_{E}\binom{U}{V}_{\lambda}\to 0$$

又因为

$$\begin{pmatrix}\prod_{\Lambda}U_{\lambda}\\ \prod_{\Lambda}V_{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\prod_{\Lambda}U_{\lambda}\\ 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ \prod_{\Lambda}V_{\lambda}\end{pmatrix}\cong$$

$$\prod_{\Lambda}\binom{U_{\lambda}}{0}\oplus\prod_{\Lambda}\binom{0}{V_{\lambda}}$$

直积函子是加法函子，所以有

$$\prod_{\Lambda}\binom{U_{\lambda}}{0}\oplus\prod_{\Lambda}\binom{0}{V_{\lambda}}\cong\prod_{\Lambda}\binom{U_{\lambda}}{V_{\lambda}}$$

进而有左 T-模正合列：

$$0\to\binom{Q}{P}\to\begin{pmatrix}\prod_{\Lambda}U_{\lambda}\\ \prod_{\Lambda}V_{\lambda}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\prod_{E}U_{\lambda}\\ \prod_{E}V_{\lambda}\end{pmatrix}\to 0$$

进而有左 B-模正合列：

$$0\to Q\to\prod_{\Lambda}U_{\lambda}\to\prod_{E}U_{\lambda}\to 0$$

$$0\to P\to\prod_{\Lambda}V_{\lambda}\to\prod_{E}V_{\lambda}\to 0$$

从而 Q,P 为有限余生成模.

如果 Q 为有限余生成左 A-模，P 为有限余生成左 B-模，那么由定义 1 知对任意的单同态 $Q\to\prod_{\Lambda}U_{\lambda}$，$P\to\prod_{\Lambda'}V_{\lambda'}$ 存在正合列：

$$0\to Q\to\prod_{\Lambda}U_{\lambda}\to\prod_{E}U_{\lambda}\to 0$$

$$0\to P\to\prod_{\Lambda'}V_{\lambda'}\to\prod_{E'}V_{\lambda'}\to 0$$

从而有左 T-模正合列：

$$0\to\binom{Q}{P}\to\prod_{\Lambda\cup\Lambda'}\binom{U}{V}_{\lambda\cup\lambda'}\to\prod_{E\cup E'}\binom{U}{V}_{\lambda\cup\lambda'}\to 0$$

进而可得 $\binom{Q}{P}_{\varphi}$ 是有限余生成左 T-模.

2）由文献[10]知有限余表示模是 1-余表示模. 因为 $\binom{Q}{P}_{\varphi}$ 为有限余表示左 T-模，所以其为 1-余表示模. 由 1-余表示模定义知，存在左 T-模正合列：

$$0\to\binom{Q}{P}_{\varphi}\to\binom{Q_0}{P_0}_{\varphi^0}\to\binom{Q_1}{P_1}_{\varphi^1}$$

其中 $\binom{Q_0}{P_0}_{\varphi^0}$，$\binom{Q_1}{P_1}_{\varphi^1}$ 是有限余生成内射左 T-模. 由引理 3 可知，P_0,P_1 是内射左 B-模. 下证：P_0,P_1 为有限余生成左 B-模. 由命题 1 知若 $\binom{Q_0}{P_0}_{\varphi^0}$，$\binom{Q_1}{P_1}_{\varphi^1}$ 是有限余生成左 T-模，则 P_0,P_1 为有限余生成左 B-模. 进而存在正合列：$0\to P\to P_0\to P_1$，其中 P_0,P_1 是有限余生成内射左 B-模. 进而得到 P 是有限余表示左 B-模.

推论 1 若 ${}_AQ$ 是有限余表示左 A-模，则 $\binom{Q}{0}$ 是有限余表示左 T-模.

证明 因为 ${}_AQ$ 是有限余表示左 A-模，所以存在正合列：$0\to Q\to Q_0\to Q_1$，其中 Q_0,Q_1 是有限余生成内射模. 进而存在左 T-模正合列：

$$0\to\binom{Q}{0}\to\binom{Q_0}{0}\to\binom{Q_1}{0}$$

由命题 1 知 $\binom{Q_0}{0}$，$\binom{Q_1}{0}$ 是有限余生成左 T-模，又由引理 3 知其为内射左 T-模，进而 $\binom{Q}{0}$ 是有限余表示左 T-模.

命题 2 $\binom{Q}{P}_{\varphi}$ 是有限余表示左 T-模当且仅当 $\binom{Q}{0}$，$\binom{0}{P}$ 是有限余表示左 T-模. $\binom{Q}{P}_{\varphi}$ 是有限余生成左 T-模当且仅当 $\binom{Q}{0}$，$\binom{0}{P}$ 是有限余生成左 T-模.

证明 由引理 1 可知，有限余表示模对直和、直和项封闭. 因为 $\binom{Q}{P}_{\varphi}=\binom{Q}{0}\oplus\binom{0}{P}$，所以可证得命题成立.

定理 1 设 U_A 是有限生成右 A-模. 对于任意的有限余表示左 B-模 ${}_BP$，任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_B^i(U,P)=0$，如果 $\binom{X}{Y}_f$ 是 FC-投射左 T-模，那么 X 是 FC-投射左 A-模，Y 是 FC-投射左 B-模.

证明 对于任意的有限余表示左 A-模 ${}_AQ$，由引理 4 有 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{Y},\binom{Q}{0}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)$. 由推论 1 知，$\binom{Q}{0}$ 是有限余表示左 T-模. 又因为 $\binom{X}{Y}_f$ 是 FC-投射左 T-模，所以 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{Y},\binom{Q}{0}\right)=0$. 进而

$\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$. 故 X 是 FC-投射左 A-模. 下证：Y 是 FC-投射左 B-模.

对于任意的有限余表示左 B-模 ${}_BP$，由引理 4 有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)$$

下证.

$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}$是有限余表示左 T-模. 因为 ${}_BP$ 是有限余表示左 B-模，所以存在正合列：$0\to P\to P_0\to P_1$，其中 P_0,P_1 是有限余生成内射模. 用 $\mathrm{Hom}_B(U,-)$ 作用上正合列：

$$0\to\mathrm{Hom}_B(U,P)\to\mathrm{Hom}_B(U,P_0)\to\mathrm{Hom}_B(U,P_1)$$

进而有正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_0)\\P_0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_1)\\P_1\end{pmatrix}$$

由引理 3 知$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_0)\\P_0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_1)\\P_1\end{pmatrix}$是内射左 T-模，只需证是有限余生成模即可.

因为 ${}_BP_0$ 是有限余生成左 B-模，U_A 是有限生成右 A-模，由文献[6,30.5]知 $\mathrm{Hom}_B(U,P_0)$ 是有限余生成左 B-模，所以由命题 1 知$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_0)\\P_0\end{pmatrix}$是有限余生成左 T-模. 同理，$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P_1)\\P_1\end{pmatrix}$是有限余生成左 T-模. 进而可以得到$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}$是有限余表示左 T-模. 因为$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是 FC-投射左 T-模，所以有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}\right)=0$$

所以 $\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)=0$. 进而有 Y 是 FC-投射左 B-模.

命题 3　1) 设 U_A 是有限生成右 A-模. 如果对于任意的有限余表示左 B-模 ${}_BP$，任意的 $i\geqslant1$，有 $\mathrm{Ext}_B^i(U,P)=0$. 那么当$\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模时，Y 是 FC-投射左 B-模.

2) 如果 Y 是 FC-投射左 B-模，那么$\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模.

3) 如果对于任意的 $i\geqslant1$，$\mathrm{Tor}_i^A(U,X)=0$，那么当$\begin{pmatrix}X\\U\otimes_AX\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模时，X 是 FC-投射左 A-模.

4) 设 A 是左余诺特环，如果对于任意的 $i\geqslant1$，$\mathrm{Tor}_i^A(U,X)=0$，那么当 X 是 FC-投射左 A-模时，$\begin{pmatrix}X\\U\otimes_AX\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模.

5) 设 A 是左余诺特环，如果对于任意的有限余表示左 B-模 ${}_BP$ 有 $\mathrm{Hom}_B(U\otimes_AX,P)=0$，那么当 X 是 FC-投射左 A-模时，$\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模.

6) 如果$\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模，那么 X 是 FC-投射左 A-模.

证明　1) 对于任意的有限余表示左 B-模 P，$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}$是有限余表示左 T-模. 有同构式 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)$，如果$\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模，那么有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}\right)=0$$

进而有 $\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)=0$. 从而 Y 是 FC-投射左 B-模.

2) 如果 Y 是 FC-投射左 B-模，对于任意的有限余表示左 T-模$\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}_\varphi$，由命题 1 知 P 是有限余表示左 B-模，那么对于同构式 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)$，因为 Y 是 FC-投射左 B-模，所以

$$\mathrm{Ext}_B^1(Y,P)=0$$

进而有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}\right)=0$$

从而$\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模.

3) 假设$\begin{pmatrix}X\\U\otimes_AX\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模，对于任意的有限余表示左 A-模 Q，由推论 1 知$\begin{pmatrix}Q\\0\end{pmatrix}$是有限余表示左 T-模. 因为$\begin{pmatrix}X\\U\otimes_AX\end{pmatrix}$是 FC-投射左 T-模，所以 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\U\otimes_AX\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\0\end{pmatrix}\right)=0$. 又因为

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{0}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)$$

所以$\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$. 进而可得 X 是 FC-投射左 A-模.

4）如果 X 是 FC-投射左 A-模，对于任意的有限余表示左 T-模$\binom{Q}{P}_\varphi$，有正合列：

$$0\to\binom{0}{P}\to\binom{Q}{P}\to\binom{Q}{0}\to 0$$

用$\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{U\otimes_A X},-\right)$作用上正合列有长正合列：

$$\begin{aligned}0\to\ &\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{0}{P}\right)\to\\ &\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{P}\right)\to\\ &\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{0}\right)\to\\ &\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{0}{P}\right)\to\\ &\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{P}\right)\to\\ &\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{0}\right)\to\cdots\end{aligned}$$

由引理 4 知：

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{0}{P}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,0)=0$$

又因为 A 为左余诺特环，X 是 FC-投射左 A-模，根据引理 2 可知 Q 是有限余表示左A-模，所以

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{0}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$$

进而有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{U\otimes_A X},\binom{Q}{P}\right)=0$$

从而$\binom{X}{U\otimes_A X}$是 FC-投射左 T-模.

5）假设 X 是 FC-投射左 A-模，对 3）中正合列用$\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{0},-\right)$作用，得到长正合列：

$$0\to\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{0},\binom{0}{P}\right)\to\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{P}\right)\to$$

$$\mathrm{Hom}_T\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{0}{P}\right)\to$$

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{P}\right)\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)$$

由引理 5 有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{0}{P}\right)\cong\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,P)=0$$

又由引理 4 有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)$$

因为$\binom{Q}{P}_\varphi$为有限余表示左 T-模，A 为左余诺特环，所以 Q 是有限余表示左 A-模，故$\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$，从而$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)=0$. 进而有

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{P}\right)=0$$

故$\binom{X}{0}$是 FC-投射左 T-模.

6）假设$\binom{X}{0}$是 FC-投射左 T-模，对于任意的有限余表示左 A-模${}_AQ$，由推论 1 知$\binom{Q}{0}$是有限余表示左 T-模. 又由引理 4 知：

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)$$

因为$\binom{X}{0}$是 FC-投射左 T-模，所以

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\binom{X}{0},\binom{Q}{0}\right)=0$$

从而$\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$. 故 X 是 FC-投射左 A-模.

推论 2　如果 A 为左余诺特环且对于任意的有限余表示左 B-模${}_BP$ 有$\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,P)=0$，那么当 X 是 FC-投射左 A-模，Y 是 FC-投射左 B-模时，$\binom{X}{Y}_f$是 FC-投射左 T-模.

证明　由命题 3 可知，如果 Y 是 FC-投射左 B-模，那么$\binom{0}{Y}$是 FC-投射左 T-模. 如果 X 是 FC-投射左 A-模，那么$\binom{X}{0}$是 FC-投射左 T-模. 又因为 FC-投射模类保持直和，所以$\binom{X}{Y}_f=\binom{0}{Y}\oplus\binom{X}{0}$是 FC-投射左 T-模.

定理 2　考虑以下条件：

1）$\binom{X}{Y}_f$是 FC-投射左 T-模；

2）X 是 FC-投射左 A-模，Coker f 是 FC-投射左 B-模且 f 是单同态.

若 U_A 是有限生成右 A-模，环 B 存在有限余表示的内射余生成子 ${}_BW$，则 1)⇒2). 反之，若 A 是左余诺特环，对于任意的 $i\geqslant 1$，$\mathrm{Tor}_i^A(U,X)=0$，则 2)⇒1).

证明　1)⇒2) 对于任意的有限余表示左 A-模 ${}_AQ$，由推论 1 知 $\begin{pmatrix}Q\\0\end{pmatrix}$ 是有限余表示左 T-模，因为 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是 FC-投射左 T-模，所以

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\0\end{pmatrix}\right)=0$$

又因为 $\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\0\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)$，所以

$$\mathrm{Ext}_A^1(X,Q)=0$$

故 X 是 FC-投射左 A-模. 下证：f 是单态射.

对于有限余表示左 B-模 ${}_BW$，存在正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}0\\W\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\0\end{pmatrix}\to 0$$

用 $\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},-\right)$ 作用上正合列：

$$0\to\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\W\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\0\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\W\end{pmatrix}\right)$$

由定理 1，证得 $\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}$ 是有限余表示左 T-模，又由命题 2 知 $\begin{pmatrix}0\\W\end{pmatrix}$ 是有限余表示左 T-模，因为 $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}_f$ 是 FC-投射左 T-模，所以可得

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\W\end{pmatrix}\right)=0$$

所以上正合列右正合得到满同态 g：

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\0\end{pmatrix}\right)$$

又因为

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}\right)\cong\mathrm{Hom}_B(Y,W)$$

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\0\end{pmatrix}\right)\cong$$
$$\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_B(U,W))$$

$$\mathrm{Hom}_A(X,\mathrm{Hom}_B(U,W))\cong\mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,W)$$

所以有交换图 2.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\W\end{pmatrix}\right) & \xrightarrow{g} & \mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,W)\\0\end{pmatrix}\right)\\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong\\
\mathrm{Hom}_B(Y,W) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_B(U\otimes_A X,W)
\end{array}$$

图 2　交换图

Fig. 2　Commutative diagram

进而有 f^* 是满同态. 因为 ${}_BW$ 为内射余生成子，所以 f 是单同态. 下证：Coker f 是 FC-投射左 B-模.

因为 f 是单同态，所以存在正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}X\\U\otimes_A X\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\\mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix}\to 0$$

对任意有限余表示左 B-模 P，用 $\mathrm{Hom}_T\left(-,\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)$ 作用上正合列：

$$0\to\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}0\\\mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\U\otimes_A X\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)\to$$
$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\\mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)\to\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)$$

因为 U_A 是有限生成右 A-模，所以 $\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_B(U,P)\\P\end{pmatrix}$ 是有限余表示左 T-模，所以由命题 2 知 $\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}$ 是有限余表示模，从而

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\P\end{pmatrix}\right)=0$$

又因为

$$\mathrm{Hom}_T\left(\begin{pmatrix}X\\ U\otimes X\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Hom}_A(X,0)=0$$

所以

$$\mathrm{Ext}_T^1\left(\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Coker}\ f,P)=0$$

进而有 Coker f 是 FC-投射左 B-模.

2)⇒1) 因为 Coker f 是 FC-投射左 B-模，所以由命题 3 知 $\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix}$ 是 FC-投射左 T-模. 又因为 X 是 FC-投射左 A-模，所以 $\begin{pmatrix}X\\ U\otimes_A X\end{pmatrix}$ 是 FC-投射左 T-模. 进而存在正合列：

$$0\to\begin{pmatrix}X\\ U\otimes_A X\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{Coker}\ f\end{pmatrix}\to 0$$

由文献[4]知 FC-投射模类对扩张封闭，从而 $\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}_f$ 是 FC-投射左 T-模.

命题 4　设 A 为左余诺特环，$_AU$ 是有限表示左 A-模. 如果满足以下条件：

1) 对于左 B-模 Y，任意的投射左 A-模 $_AP'$，有 $\mathrm{Ext}_B^i(U\otimes_A P',Y)=0$.

2) FC-pd$(_BB)\leqslant n-1$，FC-pd$(_AA)\leqslant n$，FC-pd$(_BU)\leqslant n-1$.

那么有 FC-pd$(_TT)\leqslant n-1$.

证明　假设 $\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}$ 是有限余表示左 T-模，因为 A 为左余诺特环，所以 Q,P 为有限余表示模. 又因为 FC-pd$(_AA)\leqslant n$，所以有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ 0\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_A^{n+i}(A,Q)=0$$

其中 $i\geqslant 2$. 因为 $_AU$ 是有限表示左 A-模，根据文献[6,30.5]有 $\mathrm{Hom}_B(U,P)$ 是有限余表示左 A-模，所以有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i+1}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_A^{n+i}(A,\mathrm{Hom}_B(U,P))=0$$

其中 $i\geqslant 1$. 进而有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ 0\end{pmatrix}\right)\oplus \mathrm{Ext}_T^{n+i+1}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)=0$$

其中 $i\geqslant 2$.

因为 FC-pd$(_BU)\leqslant n-1$，所以

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}0\\ U\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_B^{n+i}(U,P)=0$$

其中 $i\geqslant 2$. 进而有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\oplus \mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}0\\ U\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ U\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)=0$$

其中 $i\geqslant 2$. 又因为 FC-pd$(_BB)\leqslant n-1$，所以

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}0\\ B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_B^{n+i}(B,P)=0$$

其中 $i\geqslant 2$. 由文献[3]知，$T=\begin{pmatrix}A\\ U\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ B\end{pmatrix}$，进而有

$$\mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ U\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\oplus \mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}0\\ B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)\cong \mathrm{Ext}_T^{n+i}\left(\begin{pmatrix}A\\ U\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}Q\\ P\end{pmatrix}\right)=0$$

其中 $i\geqslant 2$. 从而有 FC-pd$(_TT)\leqslant n-1$.

由命题 4 可得

推论 3　设 $T_2=\begin{pmatrix}R & 0\\ R & R\end{pmatrix}$ 是三角矩阵环，R 是左余诺特环. 如果 FC-pd$(_RR)\leqslant n-1$，那么

$$\text{FC-pd}(_{T_2}T_2)\leqslant n-1.$$

参考文献：

[1] STENSTRÖM B. Coherent rings and FP-injective modules [J]. The American Journal of Comparative Law，1970，2(2)：323-329.

[2] 朱占敏，陈建龙. FCP-投射模与某些环 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2010，37(2)：126-130.

[3] XIONG B L，ZHANG P. Gorenstein projective modules over triangular matrix Artin algebras [J]. Journal of Algebra and its Applications，2012，11(4)：1-14.

[4] WANG Y，ZHOU D X. Gorenstein FC-projective modules [J]. Journal of Algebra and its Applications，2020，19(4)：1-26.

[5] YAN M Q，YAO H L. Gorenstein hereditary and FP-injectivity over formal triangular matrix rings [J]. Journal of Mathematical Research with Applications，2020，40(6)：596-608.

[6] WISBAUER R. Foundations of module and ring theory [M]. Gordon and Breach：Reading，1991.

[7] HIREMATH V A. Cofinitely generated and cofinitely related modules [J]. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica，1982，39(1)：1-9.

[8] HAGHANY A，VARADARAJAN K. Study of modules over formal triangular matrix rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2000，147(1)：41-58.

[9] MAO L X. Cotorsion pairs and approximation classes over formal triangular matrix rings [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2020，224(6)：1-26.

[10] BENNIS D，BOUZRAA H，KAED A Q. On n-copresented modules and n-co-coherent rings [J]. International Electronic Journal of Algebra，2012，12(4)：162-174.