第 50 卷 第 2 期 兰 州 理 工 大 学 学 报 Vol. 50 No. 2
2024 年 4 月 Journal of Lanzhou University of Technology Apr. 2024

文章编号：1673-5196(2024)02-0142-06

(m,n)-内射和(m,n)-平坦函子

朱 军，赵仁育*

（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：设 R 是有单位元的结合环，m 和 n 是两个固定的正整数. 引入了(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子的概念，研究了这两类函子的一些性质，利用(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子给出了(m,n)-凝聚环和 Von Neumann 正则环的一些等价刻画.

关键词：(m,n)-内射函子；(m,n)-平坦函子；(m,n)-凝聚环；Von Neumann 正则环；(预)覆盖；(预)包络

中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A

(m,n)-injective and (m,n)-flat functors

ZHU Jun，ZHAO Ren-yu

(College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China)

Abstract：Let R be an associative ring with identity，m and n be fixed positive integers. The notions of (m,n)-injective functors and (m,n)-flat functors are introduced. Some properties of these two classes of functors are studied and some equivalent characterizations for (m,n)-coherent rings and Von Neumann regular rings are given in terms of (m,n)-injective functors and (m,n)-flat functors.

Key words：(m,n)-injective functor；(m,n)-flat functor；(m,n)-coherent ring；Von Neumann regular ring；(pre)cover；(pre)envelop

1 预备知识

本文中，R 是有单位元的结合环，模均指酉模. 对右 R-模 M、N，将$\mathrm{Hom}_R(M,N)$简记为(M,N)；对右 R-模 M 和左 R-模 N，把 $M\otimes_R N$ 简记为 $M\otimes N$. 用 Mod-R (R-Mod) 表示右(左) R-模范畴，用 mod-R 表示有限表示右 R-模范畴，用(mod-R，Ab) (((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)) 表示从 mod-R 到 Abel 群范畴 Ab 的所有加法共(反)变函子做成的函子范畴，其中从函子 F 到 G 的全体自然变换作成的态射集记为 $[F,G]$.

函子范畴(mod-R，Ab)和((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)都是局部有限表示的 Grothendieck 范畴. 对这两类函子范畴的专门研究，始于 Auslander 和 Reiten. 当 R 是 Artin 代数时，Reiten[1]通过对(mod-R，Ab)中有限表示函子的深入分析，发展了几乎可裂序列理论. Herzog[2]将 Reiten[1]的结果拓展到了一般环上. 如今，函子范畴(mod-R，Ab)和((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)已成为代数表示论和同调代数的重要研究工具和研究对象.

众所周知，存在满忠实的左正合函子 H：mod-$R\to$((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)，$M\mapsto(-,M)$和满忠实的右正合函子 T：R-Mod$\to$(mod-R，Ab)，$M\mapsto-\otimes M$. 因此，研究 mod-R (R-Mod) 的某个满子范畴与((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)((mod-R，Ab))的某个满子范畴之间的对应关系是一个自然且有趣的问题. Crawley-Boevey 等[3-4]通过函子 H 和 T 分别建立了 mod-R 与((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)中平坦对象的满子范畴和 R-Mod 与(mod-R，Ab)中 FP-内射对象的满子范畴之间的范畴等价. Crawley-Boevey[4]证明了 F 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)中的投射对象当且仅当存在纯投射右 R-模 M，使得 $F\cong H(M)$. Gruson 等[5]证明了 F 是(mod-R，Ab)中的内射对象当且仅当存在纯内射左 R-模 M，使得 $F\cong T(M)$. Herzog[2]证明了 F 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$，Ab)中的平坦余挠对象当且仅当存在纯内射右 R-模 M，使得 $F\cong H(M)$. Crivei[6]考

收稿日期：2023-01-13
基金项目：国家自然科学基金(11861055，12061061)
通讯作者：赵仁育(1977-)，男，甘肃景泰人，博士，教授.
Email：zhaory@nwnu.edu.cn

虑了在 H 下，$((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 中与平坦右 R-模对应的函子一强平坦函子. Mao[7] 考虑了在 T 下，$(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中与 FP-内射左 R-模对应的函子一强 FP-内射函子，并系统研究了强 FP-内射函子和强平坦函子的同调性质. Xie 等[8] 研究了在 H 下，$((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 中与 FP_n-平坦右 R-模对应的函子一 n-强平坦函子和在 T 下，$(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中与 FP_n-内射左 R-模对应的函子一 n-强 FP-内射函子. Crivei[9] 研究了在 H 下，$((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 中与 FP-内射右 R-模对应的函子一弱 FP-内射平坦函子和在 T 下，$(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中与平坦左 R-模对应的函子一弱平坦 FP-内射函子.

设 m,n 是两个正整数，作为 f-内射模，P-内射，FP-内射模等的统一推广，2001 年 Chen 等[10] 研究了 (m,n)-内射模. 进一步，Zhang 等[11] 引入了 (m,n)-平坦模和 (m,n)-凝聚环的概念，利用 (m,n)-平坦模和 (m,n)-内射模给出了 (m,n)-凝聚环的等价刻画.

受上述文献的启发，本文研究了在 H 下，$((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 中与 (m,n)-平坦右 R-模对应的函子一 (m,n)-平坦函子和在 T 下，$(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中与 (m,n)-内射左 R-模对应的函子一 (m,n)-内射函子.

下面再介绍一些文中用到的基本概念，更多相关概念参见文献[9,11-14].

定义 1[11]　称左 R-模 M 是 (m,n)-表示的，如果存在左 R-模的正合列 $0\to K\to R^m\to M\to 0$，其中 K 是 R^m 的 n-生成子模.

定义 2[10-11]　称左 R-模 M 是 (m,n)-内射的，如果对任意的 (m,n)-表示左 R-模 N，$\text{Ext}_R^1(N,M)=0$.

定义 3[11]　称右 R-模 M 是 (m,n)-平坦的，如果对任意的 (m,n)-表示左 R-模 N，$\text{Tor}_1^R(M,N)=0$.

定义 4[4]　称 $(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中的正合列 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是纯正合列，如果对于任意的有限表示函子 $P\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$，序列 $0\to[P,X]\to[P,Y]\to[P,Z]\to 0$ 是正合的. 此时称 X 为 Y 的纯子函子，称 Z 为 Y 的纯商函子.

定义 5[7]　称左 R-模 M 是 FP-内射的，如果对任意有限表示左 R-模 N，$\text{Ext}_R^1(N,M)=0$. 称右 R-模 M 是平坦模，如果对任意有限表示左 R-模 N，$\text{Tor}_1^R(M,N)=0$.

定义 6[7]　称函子 $F\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 为 FP-内射函子，如果对任意有限表示函子 X，$\text{Ext}_R^1(X,F)=0$，等价地 $F\cong -\otimes M$，其中 M 是左 R-模. 称函子 $G\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 为平坦函子，如果 G 同构于有限生成投射函子的正向极限，等价地 $G\cong(-,N)$，其中 N 是右 R-模.

定义 7[7]　称函子 $F\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 为强 FP-内射函子，如果 $F\cong -\otimes M\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$，其中 M 是 FP-内射左 R-模. 称函子 $G\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 为强平坦函子，如果 $G\cong(-,N)\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$，其中 N 是平坦右 R-模.

定义 8[11]　称环 R 是左 (m,n)-凝聚的，如果左 R-模 R^m 的每个 n-生成子模是有限表示的.

2　主要结果

定义 9　称函子 $F\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 为 (m,n)-内射函子，如果 $F\cong -\otimes M\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$，其中 M 是 (m,n)-内射左 R-模. 称函子 $G\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 为 (m,n)-平坦函子，如果 $G\cong(-,N)\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$，其中 N 是 (m,n)-平坦右 R-模.

对于一个模 M，其示性模 $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 记为 M^+. 设 $\mathscr{C}$ 是加法范畴，$F:\mathscr{C}\to\text{Ab}$ 是加法函子，F 的示性函子 $F^+:\mathscr{C}^{op}\to\text{Ab}$ 定义为：对于任意 $M\in\mathscr{C}$，$F^+(M)=(F(M))^+$. 易见，存在自然变换 $\delta_F:F\to F^{++}$，$(\delta_F)_M(x)(\tau)=\tau(x)$，其中 $M\in\mathscr{C}$，$x\in F(M)$，$\tau\in F^+(M)$.

命题 1　设 R 是一个环，则 $F\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 是 (m,n)-平坦函子当且仅当 $F^+\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 是 (m,n)-内射的.

证明　必要性）设 $F\cong(-,M)\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 是 (m,n)-平坦函子，则 M 是 (m,n)-平坦右 R-模，于是由文献[11]定理 4.3 知 M^+ 是 (m,n)-内射左 R-模. 因此 $-\otimes M^+$ 是 (m,n)-内射函子. 由文献[15]引理 3.55 知 $(-,M)^+\cong -\otimes M^+\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$，所以 $F^+\cong -\otimes M^+\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 是 (m,n)-内射函子.

充分性）因为 F^+ 是 (m,n)-内射函子，所以 F^+ 是 FP-内射函子. 故由文献[12]命题 2.9 知 F 是平坦函子. 故存在右 R-模 M，使得 $F\cong(-,M)$. 于是由文献[15]引理 3.55 知 $F^+=(-,M)^+\cong -\otimes M^+$. 因此 M^+ 是 (m,n)-内射左 R-模. 进而由文献[11]定理 4.3 知 M 是 (m,n)-平坦右 R-模，因此 $F\in((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 是 (m,n)-平坦函子.

命题 2　设 R 是一个环，则

1）$(\text{mod-}R,\text{Ab})$ 中 (m,n)-内射函子的类关于扩张，直和，直积和直和项封闭.

2）$((\text{mod-}R)^{op},\text{Ab})$ 中 (m,n)-平坦函子的类关

于扩张,正向极限,直和项,纯子函子和纯商封闭.

证明　1) 设 $0\to -\otimes M\to G\to -\otimes L\to 0$ 是(mod-R,Ab)中的正合列,其中 M 和 L 是(m,n)-内射模.则由文献[12]命题2.3(1)知 G 是FP-内射函子.设 $G\cong -\otimes N$,则有左 R-模的正合列 $0\to M\to N\to L\to 0$.由于 M 和 L 是(m,n)-内射模,所以 N 是(m,n)-内射模,因此 G 是(m,n)-内射函子.

设$\{-\otimes M_i\}_{i\in I}$是(mod-$R$,Ab)中$(m,n)$-内射函子的指标集,则每个 M_i 是(m,n)-内射模.故由文献[11]推论2.8知$\coprod M_i$ 和$\prod M_i$ 都是(m,n)-内射的,从而由

$$\coprod(-\otimes M_i)\cong -\otimes\coprod M_i$$
$$\prod(-\otimes M_i)\cong -\otimes\prod M_i$$

知$\coprod(-\otimes M_i)$和$\prod(-\otimes M_i)$都是(m,n)-内射函子.

设 $F,G\in$(mod-R,Ab),并且 $F\oplus G\cong -\otimes M$,其中 M 是(m,n)-内射左 R-模.则由文献[12]命题2.3知 F,G 是FP-内射函子,故存在 $M_1,M_2\in R$-mod,使得 $F\cong -\otimes M_1$,$G\cong -\otimes M_2$.从而由 $F\oplus G\cong -\otimes(M_1\oplus M_2)$得 $M\cong M_1\oplus M_2$.由文献[11]推论2.8知 M_1 和 M_2 都是(m,n)-内射模.因此 $F\cong -\otimes M_1$ 是(m,n)-内射函子.

2) 设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是((mod-R)^{op},Ab)中的正合列,其中 A 和 C 是(m,n)-平坦函子,则有(mod-R,Ab)中的正合列 $0\to C^+\to B^+\to A^+\to 0$,并且由命题1得 A^+ 和 C^+ 是(m,n)-内射函子.故由1)得 B^+ 是(m,n)-内射函子.于是由命题1得 B 是(m,n)-平坦函子.

设$\{(-,M_i)\}_{i\in I}$是((mod-R)^{op},Ab)中(m,n)-平坦函子的正向系,则每个$(-,M_i)$是(m,n)-平坦函子.由于$\varinjlim M_i$ 是(m,n)-平坦右 R-模且$\varinjlim(-,M_i)\cong(-,\varinjlim M_i)$,所以$\varinjlim(-,M_i)$是$(m,n)$-平坦函子.

设 $F,G\in$((mod-R)^{op},Ab),且 $F\oplus G$ 是(m,n)-平坦函子.则由命题1知 $F^+\oplus G^+$ 是(m,n)-内射函子.由1)知 F^+,G^+ 都是(m,n)-内射函子.再由命题1知 F,G 是(m,n)-平坦函子.这表明((mod-R)^{op},Ab)中(m,n)-平坦函子的类关于直和项封闭.

设 $0\to F\to G\to H\to 0$ 是((mod-R)^{op},Ab)中的纯正合列,其中 G 是(m,n)-平坦函子.则由文献[15]命题3.71知有(mod-R,Ab)中的可裂短正合列 $0\to H^+\to G^+\to F^+\to 0$.由命题1得 G^+ 是(m,n)-内射函子,从而由1)得 F^+ 和 H^+ 是(m,n)-内射函子.由命题1得 F 和 H 是(m,n)-平坦函子.

利用(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子给出左(m,n)-凝聚环,Von Neumann 正则环的等价刻画.

定理1　设 R 是一个环,则以下等价

1) R 是左(m,n)-凝聚环.

2) (mod-R,Ab)中(m,n)-内射函子的正向极限仍是(m,n)-内射的.

3) (mod-R,Ab)中(m,n)-内射函子的类关于纯子函子和纯商函子封闭.

4) $F\in$(mod-R,Ab)是(m,n)-内射函子当且仅当 $F^+\in$((mod-R)^{op},Ab)是(m,n)-平坦的.

5) $F\in$(mod-R,Ab)是(m,n)-内射函子当且仅当 $F^{++}\in$(mod-R,Ab)是(m,n)-内射的.

6) $F\in$((mod-R)^{op},Ab)是(m,n)-平坦函子当且仅当 $F^{++}\in$((mod-R)^{op},Ab)是(m,n)-平坦的.

7) ((mod-R)^{op},Ab)中(m,n)-平坦函子的类关于直积封闭.

证明　1)⇒4) 设 $F\cong -\otimes M$ 是(mod-R,Ab)中的(m,n)-内射函子,则 M 是(m,n)-内射模.由文献[11]定理5.7得 M^+ 是(m,n)-平坦右 R-模,因此$(-,M^+)$是(m,n)-平坦函子.由于$(-\otimes M)^+\cong(-,M^+)$,所以 $F^+\cong(-\otimes M)^+$ 是(m,n)-平坦函子.反之,设 F^+ 是(m,n)-平坦函子,则由文献[12]命题2.9(1)知 F 是FP-内射函子.故存在左 R-模 N,使得 $F\cong -\otimes N$.于是 $F^+\cong(-\otimes N)^+\cong(-,N^+)$.故 N^+ 是(m,n)-平坦右 R-模.由文献[11]定理5.7知 N 是(m,n)-内射模,因此 F 是(m,n)-内射函子.

4)⇒3) 设 $0\to A\to F\to C\to 0$ 是(mod-R,Ab)中的纯正合列,并且 F 是(m,n)-内射函子.则由文献[15]命题3.71知 $0\to C^+\to F^+\to A^+\to 0$ 是可裂短正合列.于是由命题2中2)知 A^+ 和 C^+ 都是(m,n)-平坦函子.进而再由4)得 A 和 C 是(m,n)-内射函子.

3)⇒2) 设$\{F_i\}_{i\in I}$是(mod-R,Ab)中的一簇(m,n)-内射函子,则由命题2中1)知$\coprod F_i$ 是(m,n)-内射函子.又$\varinjlim F_i$ 是$\coprod F_i$ 的纯商函子,所以由3)知$\varinjlim F_i$ 是(m,n)-内射函子.

2)⇒1) 设$\{M_i\}_{i\in I}$是(m,n)-内射左 R-模的正向系,则由2)知$-\otimes\lim\varinjlim M_i\cong\varinjlim(-\otimes M_i)$是$(m,n)$-内射函子,故$\varinjlim M_i$ 是(m,n)-内射模.因此由文献[11]定理5.7知 R 是左(m,n)-凝聚环.

4)⇒5) 设 $F\in$(mod-R,Ab).如果 F 是(m,n)-内射函子,那么由4)得 F^+ 是(m,n)-平坦函子.

因此由命题 1 知 F^{++}是(m,n)-内射函子. 反之,如果 F^{++}是(m,n)-内射函子,那么由命题 1 得 F^{+}是(m,n)-平坦函子,故由 4)得 F 是(m,n)-内射函子.

5)⇒6) 设 $F\in((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$. 如果 F 是(m,n)-平坦函子,那么由命题 1 得 F^{+}是(m,n)-内射函子. 于是由 5)得 F^{+++}是(m,n)-内射函子. 故由命题 1 得 F^{++}是(m,n)-平坦函子. 反之,如果 F^{++}是(m,n)-平坦函子,那么由命题 1 得 F^{+++}是(m,n)-内射函子. 由 5)得 F^{+}是(m,n)-内射函子. 再由命题 1 得 F 是(m,n)-平坦函子.

6)⇒7) 设$\{(-,M_i)\}_{i\in I}$是$((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中的一簇$(m,n)$-平坦函子,则由命题 2 中 2)得$\coprod(-,M_i)$是$(m,n)$-平坦函子,故由 6)知$(\prod(-,M_i)^{+})^{+}\cong(\coprod(-,M_i))^{++}$是$(m,n)$-平坦函子. 因为$\coprod(-,M_i)^{+}$是$\prod(-,M_i)^{+}$的纯子函子,所以由文献[15]中命题 3.71 知$(\coprod(-,M_i)^{+})^{+}$是$(\prod(-,M_i)^{+})^{+}$的直和项. 故由命题 2 中 2)知$(\coprod(-,M_i)^{+})^{+}$是(m,n)-平坦函子. 从而$\prod(-,M_i)^{++}\cong(\coprod(-,M_i)^{+})^{+}$是$(m,n)$-平坦函子. 因为 M_i 是 M_i^{++} 的纯子模,所以$\prod(-,M_i)$是$\prod(-,M_i^{++})$的纯子函子. 又由伴随同构和文献[15]引理 3.55 知$(-,M_i^{++})\cong(-,M_i)^{++}$,所以由命题 2 中 2)知$\prod(-,M_i)$是$(m,n)$-平坦函子.

7)⇒1) 设$\{M_i\}_{i\in I}$是一簇(m,n)-平坦右 R-模,则每个$(-,M_i)$是(m,n)-平坦函子. 由 7)得$\prod(-,M_i)$是(m,n)-平坦函子. 因为$(-,\prod M_i)\cong\prod(-,M_i)$,所以$(-,\prod M_i)$是$(m,n)$-平坦函子. 故$\prod M_i$是$(m,n)$-平坦右 R-模. 由文献[11]定理 5.7 得 R 是左(m,n)-凝聚环.

命题 3　设 R 是左(m,n)-凝聚环,则以下等价

1) $((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中的每个$(m,n)$-平坦函子是强平坦函子.

2) $(\text{mod-}R,\text{Ab})$中的每个(m,n)-内射函子是强 FP-内射函子.

特别地,若上述任一条件成立,则 R 是左凝聚环.

证明　1⇒2) 设 $F\cong-\otimes M\in(\text{mod-}R,\text{Ab})$是$(m,n)$-内射函子,则 M 是(m,n)-内射左 R-模. 由文献[11]定理 5.7 知 M^{+}是(m,n)-平坦,故$(-,M^{+})$是$((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中的$(m,n)$-平坦函子. 于是由 1)知$(-,M^{+})$是强平坦的,故 M^{+}是平坦的. 由文献[16]引理 2.7(1)知对于有限表示左 R-模 N,存在正合列 $\text{Tor}_1^R(M^{+},N)\to(\text{Ext}_R^1(N,M))^{+}\to0$,因此 M 是 FP-内射的,故 $F\cong-\otimes M$ 是强 FP-内射函子.

2)⇒1) 设 $F\cong(-,N)\in((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$是$(m,n)$-平坦函子,则 N 是(m,n)-平坦右 R-模. 由文献[11]定理 4.3 知 N^{+}是(m,n)-内射的. 因此$-\otimes N^{+}$是(m,n)-内射函子,由 2)知$-\otimes N^{+}$是强 FP-内射的,故 N^{+}是 FP-内射的. 因此由文献[15]引理 3.55 知 $F^{+}\cong(-,N)^{+}\cong-\otimes N^{+}$是强 FP-内射函子. 由文献[7]命题 2.5 知 F 是强平坦函子.

下证 R 是左凝聚环. 设 M 是 FP-内射左 R-模,N 是 M 的 FP-内射纯子模,则 M 和 N 均是(m,n)-内射模,由文献[11]定理 5.9 知 M/N 是(m,n)-内射的,因此$-\otimes M/N$ 是(m,n)-内射函子. 由 2)知$-\otimes M/N$ 是强 FP-内射函子,故 M/N 是 FP-内射的. 因此 R 是左凝聚环.

据文献[17]推论 2.6,R 是一个 Von Neumann 正则环当且仅当存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得每个左 R-模是(m,n)-内射的当且仅当存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得每个右 R-模是(m,n)-平坦的. 这里有

定理 2　设 R 是一个环,则以下等价

1) R 是 Von Neumann 正则环.

2) 存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得$((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中每个函子都是$(m,n)$-平坦的.

3) 存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得$((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中每个平坦函子都是$(m,n)$-平坦的.

4) 存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得$(\text{mod-}R,\text{Ab})$中每个函子都是(m,n)-内射的.

5) 存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得$(\text{mod-}R,\text{Ab})$中每个 FP-内射函子都是(m,n)-内射的.

证明　1)⇒2) 设 R 是 Von Neumann 正则环,则由文献[17]推论 2.6 知存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得每个右 R-模都是(m,n)-平坦的. 于是若 $F\in((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$,则由文献[12]第 1671 页知 F 是平坦函子,即存在右 R-模 M,使得 $F\cong(-,M)$. 而 M 是(m,n)-平坦的,所以 F 是(m,n)-平坦函子.

2)⇒3) 显然.

3)⇒1) 设 M 是一个右 R-模. 则由 3)知$(-,M)$是$((\text{mod-}R)^{\text{op}},\text{Ab})$中$(m,n)$-平坦函子. 从而 M 是(m,n)-平坦模. 因此由文献[17]推论 2.6 知 R 是 Von Neumann 正则环.

1)⇒4) 因为 R 是 Von Neumann 正则环,所以由文献[17]推论 2.6 知存在 $m,n\in\mathbf{N}_{+}$,使得每个左 R-模都是(m,n)-内射的. 另一方面,因为 R 是 Von Neumann 正则环,所以由文献[12]第 1671 页知$(\text{mod-}R,\text{Ab})$中每个函子都是 FP-内射的,因此 4)成立.

4)⇒5) 显然.

5)⇒1) 设存在 $m,n\in\mathbf{N}_+$,使得(mod-R,Ab)中每个 FP-函子都是(m,n)-内射的. 则对每个右 R-模 M,$-\otimes M^+$ 是(mod-R,Ab)中的(m,n)-内射函子. 故 M^+ 是(m,n)-内射模. 从而由文献[11]定理 4.3 知 M 是(m,n)-平坦模. 因此由文献[17]推论 2.6 知 R 是 Von Neumann 正则环.

定义 10 设 $\mathscr{A}$ 是一个加法范畴,$\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{A}$ 中一些对象的类,$M\in\mathscr{A}$. 称态射 $\varphi:M\to C$ 是 M 的 $\mathscr{C}$-预包络,如果 $C\in\mathscr{C}$,并且对任意的态射 $\psi:M\to C'$,其中 $C'\in\mathscr{C}$,都存在态射 $\alpha:C\to C'$,使得 $\psi=\alpha\varphi$. 进一步,若使得 $\varphi=\alpha\varphi$ 成立的 α 都是同构,则称 M 的 $\mathscr{C}$-预包络 $\varphi:M\to C$ 是 M 的 $\mathscr{C}$-包络. 如果 $\mathscr{A}$ 中的每个对象都有 $\mathscr{C}$-(预)包络,那么称 $\mathscr{C}$ 是一个(预)包络类.

对偶地,有 $\mathscr{C}$-预覆盖,$\mathscr{C}$-覆盖和 $\mathscr{C}$-(预)覆盖类的概念.

定理 3 设 R 是一个环.

1) 如果 R 是左(m,n)-凝聚环,那么(mod-R,Ab)中(m,n)-内射函子的类是覆盖类.

2) R 是左(m,n)-凝聚环当且仅当((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中(m,n)-平坦函子的类是预包络类.

证明 1) 由于 R 是左(m,n)-凝聚环,由定理 1 得(mod-R,Ab)中(m,n)-内射函子的类关于正向极限和纯商封闭. 从而由文献[18]定理 2.4 得(mod-R,Ab)中(m,n)-内射函子的类是覆盖类.

2) 必要性) 由于 R 是左(m,n)-凝聚环,所以由定理 1 中 7)知((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中(m,n)-平坦函子的类关于直积封闭. 又由命题 2 中 2)知((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中(m,n)-平坦函子的类关于纯子函子封闭. 所以由文献[18]定理 4.1 得((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中(m,n)-平坦函子的类是预包络类.

充分性) 设$\{(-,M_i)\}_{i\in I}$是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中的一簇(m,n)-平坦函子,则由条件知$\prod(-,M_i)$在((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中有(m,n)-平坦预包络 $\beta:\prod(-,M_i)\to(-,N)$. 设 $\pi_i:\prod(-,M_j)\to(-,M_i)$是第 i 个投射,则存在 $\varphi_i:(-,N)\to(-,M_i)$使得 $\pi_i=\varphi_i\beta$. 于是由直积的泛性质知存在 $\eta:(-,N)\to\prod(-,M_i)$使得 $\pi_i\eta=\varphi_i$. 故 $\pi_i=\varphi_i\beta=\pi_i\eta\beta$. 因此 $1=\eta\beta$. 故由命题 2 中 2)知 $\prod(-,M_i)$是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中(m,n)-平坦函子. 因此由定理 1 得 R 是左(m,n)-凝聚环.

对于共变加法函子 $F:\mathscr{C}\to\mathrm{Ab}$ 和反变加法函子 $G:\mathscr{C}\to\mathrm{Ab}$,其中 $\mathscr{C}$ 是加法范畴,存在自然同构 $\tau_{F,G}:[F,G^+]\to[G,F^+]$,其定义为 $\tau_{F,G}(\omega)_M(x)(y)=\omega_M(y)(x)$,其中 $\omega\in[F,G^+]$,$M\in\mathscr{C}$,$x\in G(M)$,$y\in F(M)$.

定理 4 设 R 是左(m,n)-凝聚环.

1) 如果 $f:A\to B$ 是(mod-R,Ab)中函子 A 的(m,n)-内射预包络,那么 $f^+:B^+\to A^+$ 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中函子 A^+ 的(m,n)-平坦预覆盖.

2) 如果 $g:C\to D$ 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中函子 C 的(m,n)-平坦预包络,那么 $g^+:D^+\to C^+$ 是(mod-R,Ab)中函子 C^+ 的(m,n)-内射预覆盖.

证明 1) 设 $f:A\to B$ 是(mod-R,Ab)中函子 A 的(m,n)-内射预包络. 则由定理 1 知 B^+ 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中的(m,n)-平坦函子. 设 F 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中的(m,n)-平坦函子,则由命题 1 知 F^+ 是(mod-R,Ab)中的(m,n)-内射函子. 因此 $f^*:[B,F^+]\to[A,F^+]$是满射. 考虑如下交换图 1.

$$\begin{tikzcd}
{[B,F^+]} \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\tau_{B,F}"'] & {[A,F^+]} \arrow[d, "\tau_{A,F}"] \\
{[F,B^+]} \arrow[r, "(f^+)_*"] & {[F,A^+]}
\end{tikzcd}$$

图 1 交换图

Fig. 1 Commutative diagram

由于 $\tau_{B,F}$ 和 $\tau_{A,F}$ 同构,所以 $(f^+)_*:[F,B^+]\to[F,A^+]$是满射,故 $f^+:B^+\to A^+$ 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中函子 A^+ 的(m,n)-平坦预覆盖.

2) 设 $g:C\to D$ 是((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab)中函子 C 的(m,n)-平坦预包络,则由命题 1 知 D^+ 是(mod-R,Ab)中的(m,n)-内射函子. 对于(mod-R,Ab)中任意(m,n)-内射函子 G,由定理 1 知 G^+ 是(m,n)-平坦函子. 因此 $g^*:[D,G^+]\to[C,G^+]$是满射. 考虑如下交换图 2.

$$\begin{tikzcd}
{[G,D^+]} \arrow[r, "(g^+)_*"] \arrow[d, "\tau_{G,D}"'] & {[G,C^+]} \arrow[d, "\tau_{G,C}"] \\
{[D,G^+]} \arrow[r, "g^*"] & {[C,G^+]}
\end{tikzcd}$$

图 2 交换图

Fig. 2 Commutative diagram

由于 $\tau_{G,C}$ 和 $\tau_{G,D}$ 同构,所以 $(g^+)_*:[G,D^+]\to[G,C^+]$是满射,故 $g^+:D^+\to C^+$ 是(mod-R,Ab)中函子 C^+ 的(m,n)-内射预覆盖.

3 结论

函子范畴是代数表示论和同调代数的重要研究工具和研究对象,特别是(mod-R,Ab)和((mod-R)$^{\mathrm{op}}$,Ab). 近年来,对一类特定的左(右)R-模,范畴

(mod-R, Ab)(((mod-R)$^{\mathrm{op}}$, Ab))中的对象 $-\otimes M$((−,M))得到了广泛的研究.本文的主要工作和结论如下:

1) 借助于(m,n)-内射模和(m,n)-平坦模,引入了(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子,并研究了这两类函子的性质.同时利用(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子给出了(m,n)-凝聚环和 Von Neumann 正则环的一些等价刻画.

2) 将(m,n)-内射模和(m,n)-平坦模的一些性质推广至函子范畴,表明了在函子范畴中(m,n)-内射函子和(m,n)-平坦函子也具有和模范畴中(m,n)-内射模和(m,n)-平坦模相似的性质和结论.

参考文献:

[1] REITEN I. The use of almost split sequences in the representation theory of artin algebras [J]. Lecture Notes in Mathematics,1982,944(1):29-104.

[2] HERZOG I. Contravariant functors on the category of finitely presented modules [J]. Israel Journal of Mathematics,2008,167(1):347-410.

[3] CRAWLEY-BOEVEY W,TACHIKAWA H,JBRENNER S. Modules of finite length over their endomorphism rings [J]. Representations of Algebras and Related Topics,1992,168:127-184.

[4] CRAWLEY-BOEVEY W. Locally finitely presented additive categories [J]. Communications in Algebra,1994,22(5):1641-1674.

[5] GRUSON L,GENSEN C U. Dimensions cohomologiques reliées aux foncteurs $\varprojlim(i)$ [J]. Lecture Notes in Mathematics,1981,867:234-294.

[6] CRIVEI S. On flat objects of finitely accessible categories [J]. The Scientific World Journal,2013,2013:1-4.

[7] MAO L X. Strongly FP-injective and strongly flat functors [J]. Rendiconti del Seminnario Matematico della Universitàdi Padova,2016,135:133-149.

[8] XIE Z Y,LIU Z K. Some precovers and preenvelopes in functor categories [J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,2021,52(3):903-910.

[9] CRIVEI S. Flat weakly FP-injective and FP-injective weakly flat functors [J]. Results in Mathematics,2017,71(3/4):1031-1045.

[10] CHEN J L,DING N Q,LI Y L,*et al*. On (m,n)-injective of modules [J]. Communications in Algebra,2001,29(12):5589-5603.

[11] ZHANG X X,CHEN J L,ZHANG J. On (m,n)-injective of modules and (m,n)-coherent rings [J]. Algebra Colloquium,2005,12(1):149-160.

[12] MAO L X. On covers and envelopes in some functor categories [J]. Communications in Algebra,2013,41(5):1655-1684.

[13] 陈 东. GIac-内射模与 GIac-平坦模的环刻画 [J]. 兰州理工大学学报,2021,47(3):156-161.

[14] 吴德军,赵自红. 投射余分解 Gorenstein 平坦复形 [J]. 兰州理工大学学报,2020,46(6):153-158.

[15] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra [M]. 2nd ed. New York:Springer,2009.

[16] CHEN J L,DING N Q. On n-Coherent rings [J]. Communications in Algebra,1996,24(10):3211-3216.

[17] MAO L X,DING N Q. On relative injective modules and relative coherent rings [J]. Communications in Algebra,2006,34(7):2531-2545.

[18] CRIVEI S,PREST M,TORRECILLAS B. Covers in finitely accessible categories [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2009,138(4):1213-1221.